

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Харків
«Гімназія»
2018

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для
10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк,
Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. —
Х. : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.
ISBN 978-966-474-311-9.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]

ISBN 978-966-474-311-9

© А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський,
В. Б. Полонський, М. С. Якір, 2018
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет,
художнє оформлення, 2018

ЛЮБИ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ ТА ДЕСЯТИКЛАСНИЦІ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — алгебру і початки аналізу.

Цей предмет надзвичайно важливий. Мабуть, у наш час немає такої галузі науки, де не застосовують досягнень цього розділу математики. У фізиці та хімії, астрономії та біології, географії та економіці, навіть у лінгвістиці та історії використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий навчальний предмет. Він розвиває аналітичне й логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість.

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях — вивчати математику за програмою профільного рівня. Це не просто. Потрібно бути наполегливими та завзятими, уважними й акуратними, при цьому найголовніше — не бути байдужими до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми віримо в те, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, *жирним курсивом* і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

У цій книзі ви ознайомитеся з низкою важливих теорем. Деякі з них подано з повними доведеннями. У тих випадках, коли доведення виходять за межі розглядуваного курсу, у підручнику наведено тільки формулювання теорем.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Для тих, хто в 7–9 класах вивчав алгебру за програмою поглибленого рівня, деякі теми цього підручника не є новими. За потреби можна звернутися до них для повторення раніше вивченого матеріалу.

Держайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ ТА КОЛЕЖАНКИ!




Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з профільним рівнем вивчення математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає від вас великих зусиль, адже ви формуєте навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

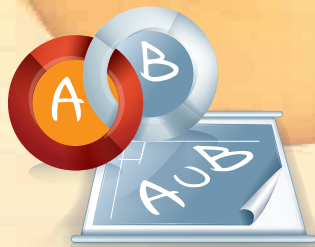
Умовні позначення

- n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
- n^{\cdot} завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- n^{\bullet} завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- n^* задачі для математичних гуртків і факультативів;
-  ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;
-  закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;
-  рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.

§ 1

ПОВТОРЕННЯ ТА РОЗШИРЕННЯ ВІДОМОСТЕЙ ПРО МНОЖИНИ ТА ФУНКЦІЇ



- 1.** Множини. Операції над множинами
- 2.** Функція та її властивості
- 3.** Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень
- 4.** Обернена функція
- 5.** Метод інтервалів
- 6.** Ділення многочленів. Теорема Безу
- 7.** Метод математичної індукції

- У цьому параграфі ви повторите основні відомості про множини та функції, рівняння та нерівності; дізнаєтеся, яку функцію називають оберотною, які функції називають взаємно оберненими.
- Ознайомитеся з новими методами побудови графіків функцій за допомогою перетворень.

1. Множини. Операції над множинами

З поняттям множини ви ознайомилися в курсі алгебри 8 класу. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Часто в повсякденному житті об'єднані за деякою ознакою об'єкти ми називаємо *групою*, *об'єднанням*, *колекцією*, *сукупністю* тощо. Для цих слів у математиці існує синонім — **множина**.

Наведемо кілька прикладів множин:

- множина літер української мови;
- множина областей України.

Окремим найважливішим множинам присвоєно загальноприйняті назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура**;
- множина натуральних чисел, яку позначають буквою \mathbb{N} ;
- множина цілих чисел, яку позначають буквою \mathbb{Z} ;
- множина раціональних чисел, яку позначають буквою \mathbb{Q} ;
- множина дійсних чисел, яку позначають буквою \mathbb{R} .

Якщо елемент a належить множині A , то записують: $a \in A$ (читають: « a належить множині A »). Якщо елемент b не належить множині A , то записують: $b \notin A$ (читають: « b не належить множині A »).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $a \in \{a, b, c\}$.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Наприклад, якщо M — множина натуральних чисел, які менші від 5, то записують: $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Другий спосіб полягає в тому, що вказують **характеристичну властивість** елементів множини, тобто властивість, яку мають усі елементи даної множини й тільки вони.

Якщо x — довільний елемент множини A , яку задано за допомогою характеристичної властивості її елементів, то записують: $A = \{x \mid \dots\}$. Тут після вертикальної риси вказують умову, яку має задовольняти елемент x , щоб належати множині A .

Розглянемо кілька прикладів.

- $\{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$ — множина натуральних чисел, кратних 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множина коренів рівняння $x(x^2 - 1) = 0$.

Означення. Множину B називають **підмножиною** множини A , якщо кожний елемент множини B є елементом множини A .

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B — підмножина множини A » або «множина A містить множину B »).

Розглянемо приклади:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.

Для ілюстрації співвідношень між множинами користуються схемами, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 1.1 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$.

На рисунку 1.2 за допомогою діаграм Ейлера показано співвідношення між множинами \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} і \mathbb{R} .

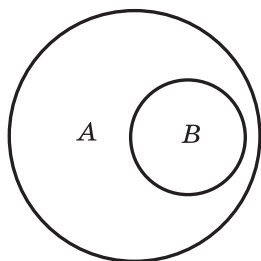


Рис. 1.1

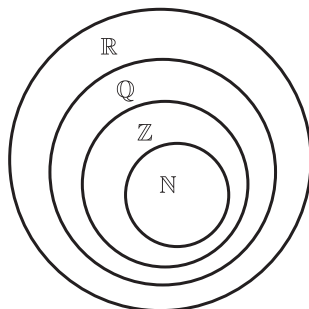


Рис. 1.2

Зауважимо, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Означення. Множину, яка не містить жодного елемента, називають **порожньою множиною** та позначають \emptyset .

Порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини, тобто для будь-якої множини A справедливим є твердження: $\emptyset \subset A$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

Означення. Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають **власною підмножиною** множини A .

Наприклад, множина \mathbb{Z} є власною підмножиною множини \mathbb{Q} .

Означення. Перерізом множин A і B називають множиною, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A , і множині B .

Переріз множин A і B позначають так: $A \cap B$. З означення випливає, що

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їхнім перерізом є порожня множина, тобто $A \cap B = \emptyset$. Також зазначимо, що $A \cap \emptyset = \emptyset$.

З означення перерізу двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$.

Наприклад, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$.

Переріз множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 1.3 заштрихована фігура зображує множину $A \cap B$.

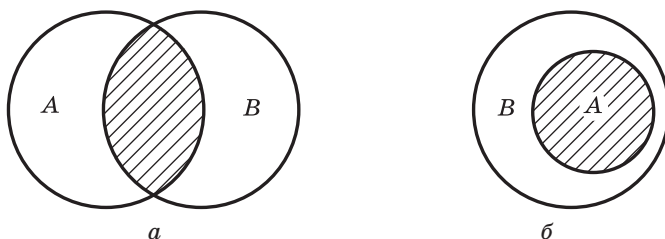


Рис. 1.3

Означення. Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин: або множині A , або множині B .

Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$. З означення випливає, що

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Зауважимо, що для будь-якої множини A виконується рівність $A \cup \emptyset = A$.

З означення об'єднання двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$.

Об'єднання множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 1.4 заштрихована фігура зображує множину $A \cup B$.

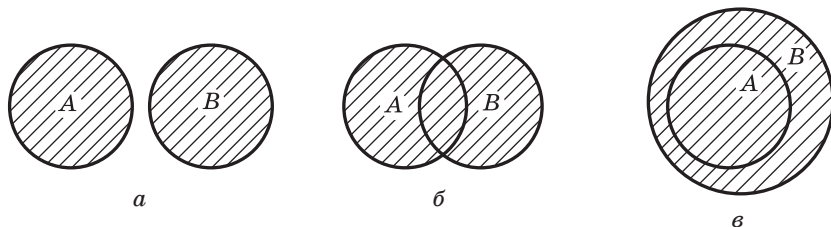


Рис. 1.4

Часто доводиться розглядати переріз та об'єднання трьох і більше множин.

Наприклад, переріз множин A , B і C — це множина всіх елементів, які належать і множині A , і множині B , і множині C (рис. 1.5).

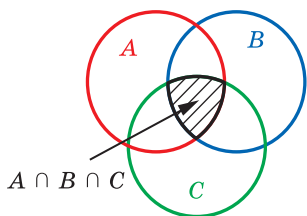


Рис. 1.5

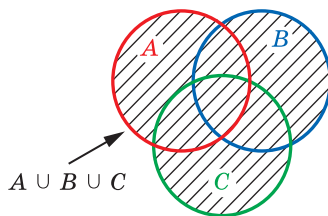


Рис. 1.6

Об'єднання множин A , B і C — це множина всіх елементів, які належать хоча б одній із цих множин: або множині A , або множині B , або множині C (рис. 1.6).

Наприклад, об'єднання множин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників — це множина всіх трикутників.

Якщо з множини \mathbb{Z} вилучити множину \mathbb{N} , то отримаємо множину цілих недодатних чисел. Вона складається з усіх елементів множини \mathbb{Z} , які не належать множині \mathbb{N} . Говорять, що множина цілих недодатних чисел є **різницею** множин \mathbb{Z} і \mathbb{N} .

Означення. **Різницею** множин A і B називають множину, що складається з усіх елементів, які належать множині A , але не належать множині B .

Різницю множин A і B позначають так: $A \setminus B$. З означення випливає, що

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Зауважимо, що для будь-якої множини A виконується рівність $A \setminus \emptyset = A$.

З означення різниці двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \setminus B = \emptyset$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \setminus A = \emptyset$.

Різницю множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 1.7 заштрихована фігура зображує множину $A \setminus B$.



Рис. 1.7

У випадку, коли множина B є підмножиною множини A , різницю $A \setminus B$ називають **доповненням** множини B до множини A . На рисунку 1.7, б цю множину зображено штриховкою. Наприклад, доповненням множини непарних чисел до множини натуральних чисел є множина парних чисел.



1. Як позначають множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел?
2. Які існують способи задання множин?
3. Яку множину називають підмножиною даної множини?
4. Як наочно ілюструють співвідношення між множинами?
5. Що називають перерізом двох множин? об'єднанням двох множин? різницею двох множин? доповненням множини?

ВПРАВИ

1.1.^o Нехай $A \neq \emptyset$. Які дві різні підмножини завжди має множина A ?

1.2.^o Чи є рівними множини A і B :

- 1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
- 2) $A = \{(0; 1)\}$, $B = \{(1; 0)\}$;
- 3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ кратне } 2 \text{ і } 3\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ кратне } 6\}$?

1.3.^o Чи є рівними множини A і B :

- 1) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$;
- 2) $A = \{x \mid x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$;
- 3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 15, x = 19k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 4\}$?

- 3) A — множина рівносторонніх трикутників, B — множина рівнобедрених трикутників;
- 4) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників.
- 1.17.* Нехай A — множина цифр десяткової системи числення, B — множина, що складається із цифр 1, 3 і 5. Укажіть множину, яка є доповненням множини B до множини A .
- 1.18.* Відомо, що для будь-якої множини B множина A є її підмножиною. Знайдіть множину A .
- 1.19.* Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cap B = A$. Знайдіть множину A .
- 1.20.* Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cup B = B$. Знайдіть множину A .
- 1.21.** Знайдіть підмножини A і B множини C такі, що для будь-якої підмножини X множини C виконується рівність $X \cap A = X \cup B$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1.22. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

$$1) \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4};$$

$$3) \sqrt{7x - 42} + \frac{1}{x^2 - 8x};$$

$$2) \frac{4}{x - 2} + \frac{1}{x};$$

$$4) \frac{x + 2}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \frac{2}{\sqrt{8 - 4x}}?$$

2. Функція та її властивості

З поняттям функції та з деякими її властивостями ви ознайомились у курсі алгебри 7–9 класів.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y .

Іншими словами: функція — це правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y .

Якщо розглядають функцію f із незалежною змінною x і залежною змінною y , то говорять, що змінна y функціонально залежить від змінної x . У такому випадку записують: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції**.

Множину всіх значень, яких набуває аргумент, тобто множину X , називають **областю визначення функції** та позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна, тобто множину Y , називають **областю значень функції** та позначають $E(f)$ або $E(y)$.

Функцію можна задати одним із таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є множина значень аргументу, при яких формула має зміст.

Наприклад, якщо функцію задано формулою $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть область значень функції $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Розв'язання. Нехай a — довільний елемент області значень даної функції, тобто $a \in E(y)$. Тоді задача зводиться до знаходження всіх значень параметра a , при яких рівняння $\frac{2x}{1+x^2} = a$ має розв'язки.

Це рівняння рівносильне такому:

$$2x = a + ax^2, \text{ звідки } ax^2 - 2x + a = 0.$$

Якщо $a = 0$, то отримане рівняння має корінь $x = 0$. Отже, число 0 входить в область значень функції.

Якщо $a \neq 0$, то це рівняння є квадратним, і наявність коренів визначається умовою $D \geq 0$.

Маємо: $D = 4 - 4a^2$. Залишається розв'язати нерівність $4 - 4a^2 \geq 0$.

Отримуємо: $4a^2 \leq 4$; $a^2 \leq 1$; $|a| \leq 1$.

Множиною розв'язків останньої нерівності є проміжок $[-1; 1]$.

Отже, $E(y) = [-1; 1]$. ◀

У курсі алгебри 9 класу для дослідження функції ви користувалися такими поняттями, як *нули функції, проміжки знакосталості, проміжки зростання і спадання*.

Наприклад, для функції $y = x^2 + 2x$, графік якої зображено на рисунку 2.1, маємо:

- нулі — числа -2 і 0 ;
- проміжки знакосталості — функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $(-\infty; -2)$ і $(0; +\infty)$, а від'ємних значень — на проміжку $(-2; 0)$;
- функція спадає на проміжку $(-\infty; -1]$ і зростає на проміжку $[-1; +\infty)$.

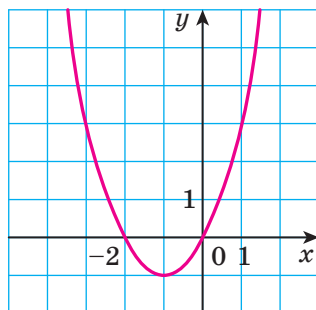


Рис. 2.1

Наведений вище перелік аж ніяк не вичерпує тих властивостей, які доцільно вивчати під час дослідження функції. Розглянемо нові поняття, які допомагають повніше охарактеризувати функцію.

Означення. Число $f(x_0)$ називають **найбільшим значенням функції** f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

Позначають: $\max_M f(x) = f(x_0)$.

Означення. Число $f(x_0)$ називають **найменшим значенням функції** f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.

Позначають: $\min_M f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ і множини $M = [0; 4]$ (рис. 2.2) маємо:

$$\min_{[0; 4]} f(x) = f(0) = 0, \quad \max_{[0; 4]} f(x) = f(4) = 2.$$

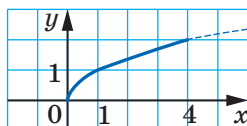


Рис. 2.2

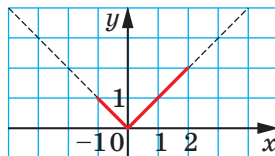


Рис. 2.3

Для $f(x) = |x|$ і множини $M = [-1; 2]$ (рис. 2.3) маємо:

$$\min_{[-1; 2]} f(x) = f(0) = 0, \quad \max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 2.$$

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M$, то число c є і найбільшим, і найменшим значеннями функції f на множині M .

Якщо множина M — це область визначення функції, то, записуючи найбільше і найменше значення функції, множину M можна не вказувати.

Не будь-яка функція на заданій множині M має найменше або найбільше значення. Так, для функції $f(x) = x^2$ маємо $\min x^2 = 0$. Найбільшого значення на множині \mathbb{R} ця функція не має (рис. 2.4).

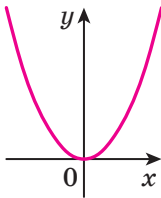


Рис. 2.4

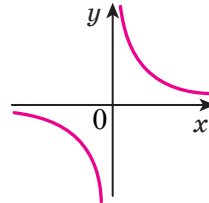


Рис. 2.5

Функція $f(x) = \frac{1}{x}$ на множині $M = (0; +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень (рис. 2.5).

Часто для знаходження найбільшого і найменшого значень функції зручно користуватися такими очевидними фактами:

↪ якщо функція f зростає на проміжку $[a; b]$, то $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$,

$$\max_{[a; b]} f(x) = f(b) \text{ (рис. 2.6);}$$

↪ якщо функція f спадає на проміжку $[a; b]$, то $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$,

$$\max_{[a; b]} f(x) = f(a) \text{ (рис. 2.7).}$$

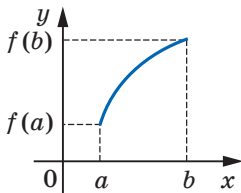


Рис. 2.6

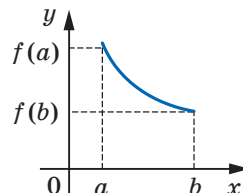


Рис. 2.7

Означення. Функцію f називають **парною**, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Означення. Функцію f називають **непарною**, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Наприклад, функція $f(x) = x^2$ — парна, а функція $g(x) = x^3$ — непарна. Справді, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ і $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Очевидно, що функція $y = 0$, у якої $D(y) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною.

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Таку область визначення функції називають **симетричною відносно початку координат**.

З наведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути парною (непарною).

Наприклад, областю визначення функції $y = \frac{1}{x-1}$ є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, яка не є симетричною відносно початку координат. Таким чином, ця функція не є ні парною, ні непарною.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - x$ є непарною.

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \mathbb{R}$, то область визначення функції f є симетричною відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо: $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$. Отже, функція f є непарною. ◀

ПРИКЛАД 3 Дослідіть на парність функцію

$$f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}.$$

Розв'язання. Маємо: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Отже, область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1-x} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Таким чином, функція f є парною. ◀

Теорема 2.1. *Вісь ординат є вісю симетрії графіка парної функції.*

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що коли точка $M(a; b)$ належить графіку парної функції, то точка $M_1(-a; b)$ також належить її графіку.

Якщо точка $M(a; b)$ належить графіку функції f , то $f(a) = b$. Оскільки функція f є парною, то $f(-a) = f(a) = b$. Це означає, що точка $M_1(-a; b)$ також належить графіку функції f (рис. 2.8). ◀

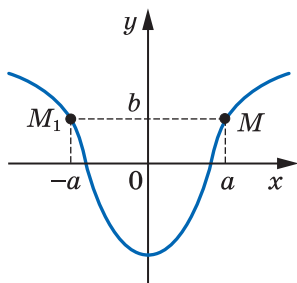


Рис. 2.8

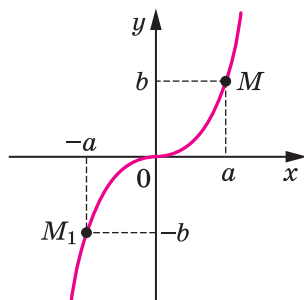


Рис. 2.9

Теорема 2.2. *Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.*

Твердження теореми проілюстровано на рисунку 2.9.

Доведіть цю теорему самостійно.

Очевидно, що функція $y = 0$, у якої $D(f) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною.



1. Що називають функцією?
2. Назвіть способи задання функції.
3. Яке число називають найбільшим (найменшим) значенням функції на множині M ?
4. Яку функцію називають парною? непарною?
5. Яку властивість має графік парної функції? непарної функції?

ВПРАВИ

2.1.^о Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \frac{x}{|x| - 7};$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}} + \frac{4x-3}{x^2-7x+6}.$$

2.2.° Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{2}{x+1}; \quad 2) f(x) = \sqrt{8-x} + \frac{4}{x^2-8x}.$$

2.3.° Знайдіть область значень функції:

$$1) f(x) = 5 - x^2; \quad 2) f(x) = |x+2| + 2; \quad 3) f(x) = \sqrt{-x^2}.$$

2.4.° Знайдіть область значень функції:

$$1) f(x) = x^2 + 3; \quad 2) f(x) = 6 - \sqrt{x}; \quad 3) f(x) = (\sqrt{x})^2.$$

2.5.° Знайдіть нулі функції:

$$1) y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}; \quad 3) y = |x| - x.$$

$$2) y = x\sqrt{x-1};$$

2.6.° Знайдіть нулі функції:

$$1) y = |x| + x; \quad 2) y = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x-2}}.$$

2.7.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

$$1) y = \sqrt{x-1}; \quad 2) y = |x+1|; \quad 3) y = \sqrt{x(x-1)^2}.$$

2.8.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

$$1) y = \sqrt{x+2}; \quad 2) y = |x^2 - 4|; \quad 3) y = \sqrt{(x-1)(x-3)^2}.$$

2.9.° Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:

$$1) f(2) - f(-2) = 1; \quad 2) f(5)f(-5) = -2; \quad 3) \frac{f(1)}{f(-1)} = 0?$$

2.10.° Функція f є непарною. Чи може виконуватися рівність:

$$1) f(1) + f(-1) = 1; \quad 2) f(2)f(-2) = 3; \quad 3) \frac{f(-2)}{f(2)} = 0?$$

2.11.° Доведіть, що функція є парною:

$$1) f(x) = -3x^2 + |x| - 1;$$

$$2) f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}};$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{x^2 + 3x + 5};$$

$$4) f(x) = (x+2)|x-4| - (x-2)|x+4|.$$

2.12.° Доведіть, що функція є непарною:

$$1) g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}; \quad 3) g(x) = \frac{|4x-1| - |4x+1|}{x^4 - 1};$$

$$2) g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}; \quad 4) g(x) = \frac{3x+2}{x^2-x+1} + \frac{3x-2}{x^2+x+1}.$$

2.13.* Дослідіть на парність функцію:

$$1) y = \frac{x-1}{x-1}; \quad 2) y = \frac{x^2-1}{x^2-1}; \quad 3) y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}.$$

2.14.* Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{4-|x|} + \frac{1}{x+2}; \quad 3) y = \sqrt{|x+1|(x-3)}.$$

$$2) y = \sqrt{|x|-3} + \frac{1}{\sqrt{x+1}};$$

2.15.* Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + \sqrt{x+4}; \quad 3) y = \sqrt{(x+4)^2(x-3)}.$$

$$2) y = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2(x+3)}};$$

2.16.** Знайдіть $\max_M f(x)$ і $\min_M f(x)$, якщо:

$$1) f(x) = x^2 - 6x + 10, \quad M = \mathbb{R}; \quad 2) f(x) = \sqrt{16-x^2}, \quad M = D(f).$$

2.17.** Знайдіть $\max_M f(x)$ і $\min_M f(x)$, якщо:

$$1) f(x) = -x^2 - 8x - 3, \quad M = \mathbb{R}; \quad 2) f(x) = \sqrt{2x-x^2}, \quad M = D(f).$$

2.18.** Непарна функція $f \in$ такою, що $0 \in D(f)$. Знайдіть $f(0)$.

2.19.** Непарна функція f має 4 нулі. Доведіть, що $0 \notin D(f)$.

2.20.** Непарна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

2.21.** Парна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

2.22.** Функція $f \in$ парною, $\min_{[1;3]} f(x) = 2$ і $\max_{[1;3]} f(x) = 5$. Знайдіть

$$\min_{[-3;-1]} f(x), \quad \max_{[-3;-1]} f(x).$$

2.23.** Функція $f \in$ непарною, $\min_{[2;5]} f(x) = 1$ і $\max_{[2;5]} f(x) = 3$. Знайдіть

$$\min_{[-5;-2]} f(x), \quad \max_{[-5;-2]} f(x).$$

2.24.** Знайдіть область значень функції:

$$1) y = -2x^2 + 3x - 4; \quad 2) y = \frac{3x+1}{2x+3}; \quad 3) y = \frac{x}{x^2-1}.$$

2.25.** Знайдіть область значень функції:

$$1) y = 5x^2 - x + 1; \quad 2) y = \frac{2x-1}{5x+4}; \quad 3) y = 4x + \frac{1}{x}.$$

2.26.** Знайдіть:

$$1) \min_{\mathbb{R}} (|x-1| + |x-3|); \quad 3) \max_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1}.$$

$$2) \max_{\mathbb{R}} (|x+2| - |x|);$$

2.27.* Розв'яжіть рівняння $|x+1| - |x| = \sqrt{x^4+1}$.

2.28.* Розв'яжіть рівняння $|x-1| + |x+2| = \sqrt{9-x^2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.29. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2}{x-4} = \frac{4x}{x-4};$$

$$2) \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} = 0.$$

2.30. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0, \\ 10 - 3x - x^2 > 0. \end{cases}$$

3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

У 9 класі ви навчилися за допомогою графіка функції $y = f(x)$ будувати графіки функцій $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = kf(x)$.

Покажемо, як можна побудувати графік функції $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Якщо точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ належить графіку функції $y = f(kx)$.

Справді, при $x = \frac{x_0}{k}$ маємо: $f(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0$.

Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ графіка функції $y = f(kx)$. Аналогічно кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(kx)$ є відповідною єдиній точці $(kx_1; y_1)$ графіка функції $y = f(x)$.

Таким чином, *графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою ординатою та з абсцисою, поділеною на k .*

На рисунку 3.1 показано, як можна використати це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{2x}$ і $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

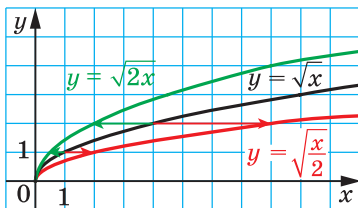


Рис. 3.1

Говорять, що графік функції $y = f(kx)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **стискання в k разів до осі ординат**, якщо $k > 1$, або в результаті **розтягнення в $\frac{1}{k}$ раза від осі ординат**, якщо $0 < k < 1$.

Так, графік функції $y = \sqrt{2x}$ отримано в результаті стискання графіка функції $y = \sqrt{x}$ у 2 рази до осі ординат, а графік функції $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ — у результаті розтягнення графіка функції $y = \sqrt{x}$ у 2 рази від осі ординат.

Покажемо, як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Якщо точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(-x)$. Справді, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $(-x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(-x)$. Аналогічно можна показати, що кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(-x)$ є відповідною єдиній точці $(-x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(x)$.

Таким чином, *графік функції $y = f(-x)$ можна отримати, відобразивши графік функції $y = f(x)$ симетрично відносно осі ординат.*

Таке перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають **симетрією відносно осі ординат**.

На рисунку 3.2 показано, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудовано графік функції $y = \sqrt{-x}$.

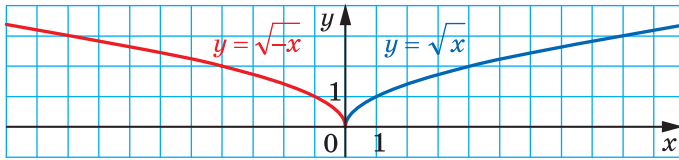


Рис. 3.2

Тепер стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k < 0$, є таким самим, як і для випадку $k > 0$. Наприклад, на рисунку 3.3 показано, як за допомогою графіка функції

$y = \sqrt{x}$ можна побудувати графіки функцій $y = \sqrt{-3x}$ і $y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$.

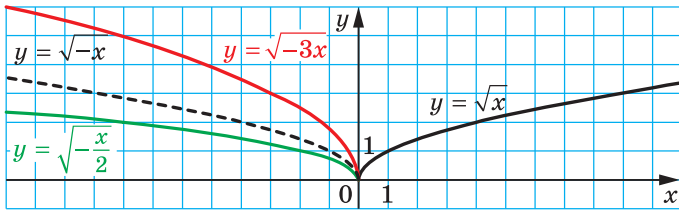
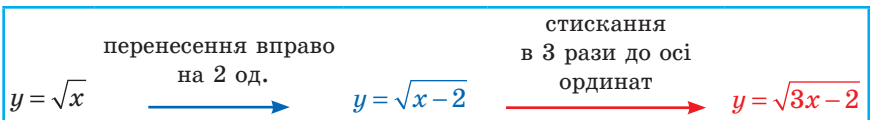


Рис. 3.3

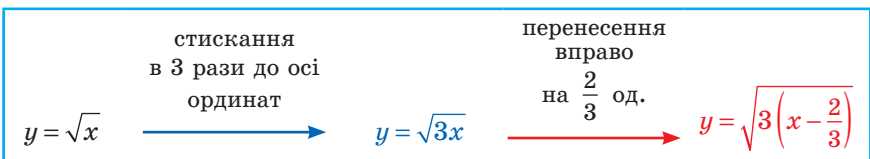
ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y = \sqrt{3x - 2}$.

Розв'язання. Схема побудови має такий вигляд:



На рисунку 3.4 показано побудову шуканого графіка.

Якщо дану функцію подати у вигляді $y = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}$, то побудову графіка можна вести й за такою схемою:



На рисунку 3.5 показано побудову, проведenu за цією схемою.

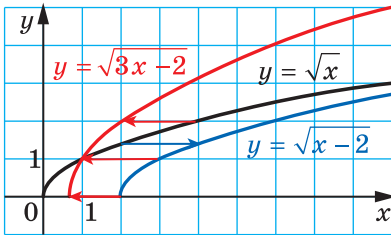


Рис. 3.4

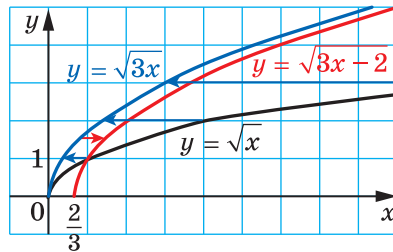
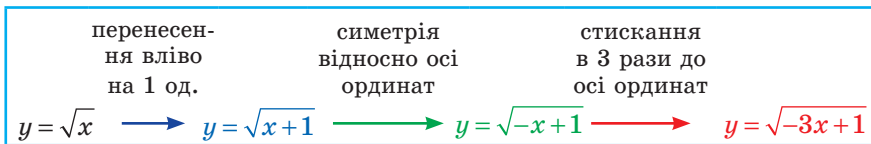


Рис. 3.5

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y = \sqrt{1-3x}$.

Розв'язання. Побудову графіка можна вести за такою схемою:



На рисунку 3.6 показано побудову шуканого графіка.

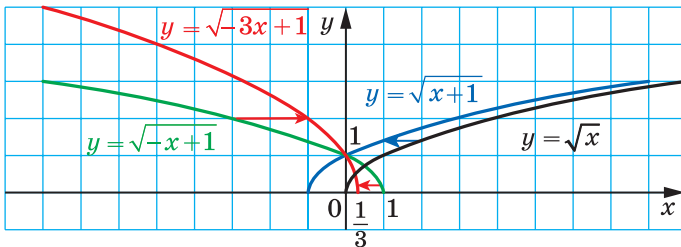
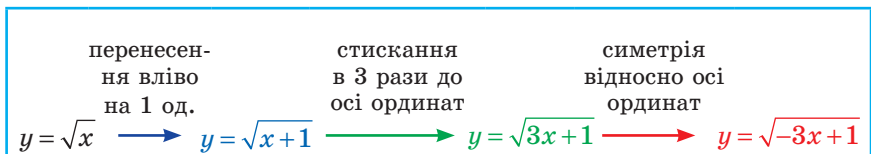


Рис. 3.6

Зауважимо, що можливі й інші схеми розв'язування цієї задачі, наприклад така:



Цій схемі відповідає рисунок 3.7.

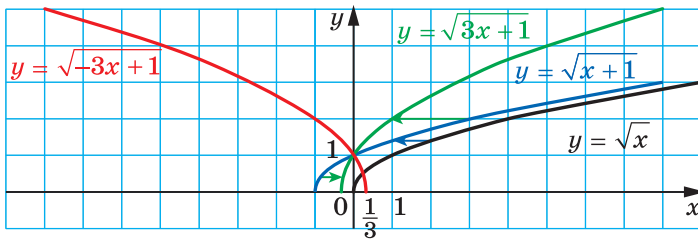


Рис. 3.7

Скориставшись означенням модуля, можна записати:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Звідси можна зробити висновок, що графік функції $y = f(|x|)$ при $x \geq 0$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при $x < 0$ — з графіком функції $y = f(-x)$.

Тоді побудову графіка функції $y = f(|x|)$ можна проводити так:

- 1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;
- 2) побудувати ту частину графіка функції $y = f(-x)$, усі точки якої мають від'ємні абсциси.

Об'єднання цих двох побудованих фігур є графіком функції $y = f(|x|)$.

Зауважимо, що функція $y = f(|x|)$ є парною; тому вісь ординат є віссю симетрії її графіка. Тоді графік функції $y = f(|x|)$ можна отримати ще й таким чином:

- 1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;
- 2) побудувати фігуру, симетричну отриманій відносно осі ординат.

Об'єднання двох побудованих фігур є графіком функції $y = f(|x|)$.

На рисунку 3.8 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x - 2)^2$ побудовано графік функції $y = (|x| - 2)^2$.

Для функції $y = |f(x)|$ запишемо:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси можна дійти такого висновку: графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x , для яких $f(x) \geq 0$, збігається з графіком функції

$y = f(x)$, а при всіх x , для яких $f(x) < 0$, — з графіком функції $y = -f(x)$.

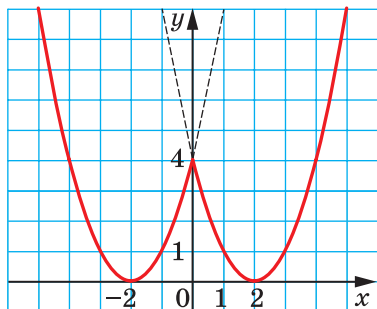


Рис. 3.8

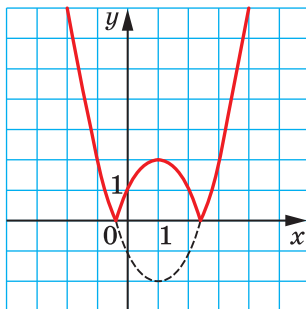


Рис. 3.9

Тоді побудову графіка функції $y = |f(x)|$ можна проводити так:

- 1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні ординати;
- 2) побудувати ту частину графіка функції $y = -f(x)$, усі точки якої мають додатні ординати.

Об'єднання двох побудованих фігур є графіком функції $y = |f(x)|$.

Оскільки графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі абсцис, то шуканий графік можна отримати ще й таким чином:

- 1) ту частину графіка функції $y = f(x)$, точки якої мають невід'ємні ординати, залишити без змін;
- 2) побудувати фігуру, симетричну відносно осі ординат тій частині графіка функції $y = f(x)$, точки якої мають від'ємні ординати.

Об'єднання цих двох побудованих фігур і становитиме графік функції $y = |f(x)|$.

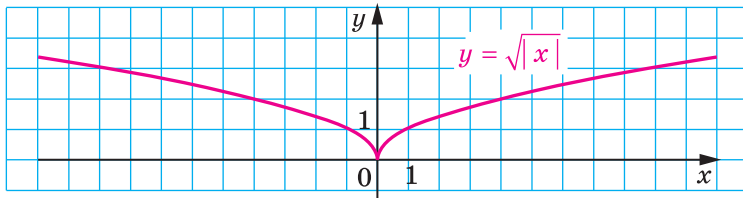
На рисунку 3.9 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x - 1)^2 - 2$ побудовано графік функції $y = |(x - 1)^2 - 2|$.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y = |\sqrt{|x+1|} - 1|$.

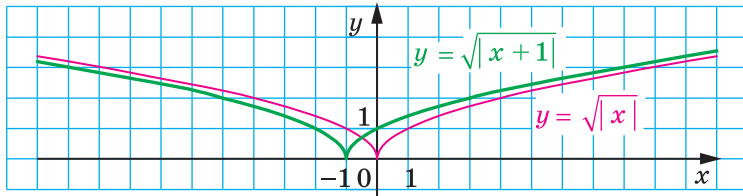
Розв'язання. Побудову шуканого графіка можна подати у вигляді такої схеми:

$$y = \sqrt{|x|} \longrightarrow y = \sqrt{|x+1|} \longrightarrow y = \sqrt{|x+1|} - 1 \longrightarrow y = |\sqrt{|x+1|} - 1|.$$

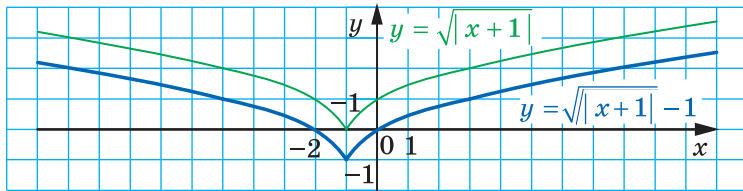
На рисунку 3.10 показано етапи побудови шуканого графіка. ◀



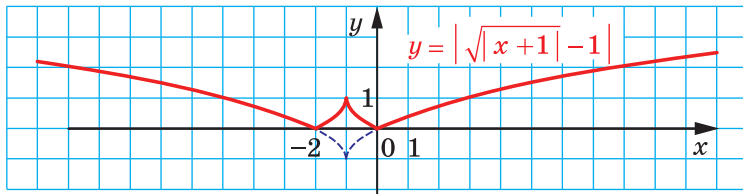
a



б



в



г

Рис. 3.10

ПРИКЛАД 4 При яких значеннях параметра a рівняння $|2|x| - 1| = x - a$ має три корені?

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = |2|x| - 1|$. Проведемо побудову її графіка за такою схемою:

$$y = 2x - 1 \rightarrow y = 2|x| - 1 \rightarrow y = |2|x| - 1|.$$

Графік функції f зображено на рисунку 3.11 червоним кольором.

Розглянемо функцію $g(x) = x - a$. Її графіком є пряма.

Задача зводиться до того, щоб знайти таке положення прямої $g(x) = x - a$, при якому графіки функцій f і g мають три спільні точки.

Ця умова виконується лише тоді, коли пряма $g(x) = x - a$ проходить через точку $(-\frac{1}{2}; 0)$ або через точку $(0; 1)$ (рис. 3.11).

Знайдемо значення параметра a , які відповідають цим положенням прямої.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} -\frac{1}{2} - a = 0, \\ 0 - a = 1; \end{cases} \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ a = -1. \end{cases}$$

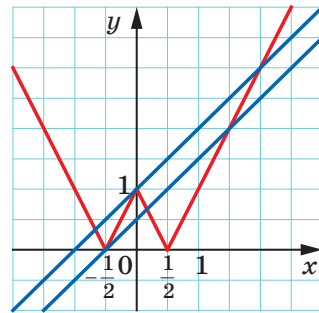


Рис. 3.11

Відповідь: $a = -\frac{1}{2}$ або $a = -1$. ◀



1. Як можна побудувати графік функції $y = f(kx)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$, якщо $k > 0$? $k < 0$?
2. Як можна побудувати графік функції $y = f(|x|)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
3. Як можна побудувати графік функції $y = |f(x)|$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?

ВПРАВИ

3.1.° Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{\frac{x}{5}}; \quad 2) y = \sqrt{-2x}; \quad 3) y = (2x - 1)^2 - 4; \quad 4) y = \frac{1}{4x + 1}.$$

3.2.° Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{5x}; \quad 2) y = \sqrt{-\frac{x}{3}}; \quad 3) y = (2x + 1)^2 + 4; \quad 4) y = \frac{1}{1 - 3x}.$$

3.3.° Побудуйте графік функції:

$$1) y = |x^2 - 1|; \quad 2) y = \left| \frac{2}{x - 1} \right|; \quad 3) y = \left| \frac{x - 4}{x + 1} \right|.$$

3.4.° Побудуйте графік функції:

$$1) y = |\sqrt{x} - 1|; \quad 2) y = \left| \frac{4}{x - 2} \right|; \quad 3) y = \left| \frac{x + 2}{x - 3} \right|.$$

3.5.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{2x-1};$$

$$3) y = \sqrt{\frac{1}{2}x+2};$$

$$2) y = \sqrt{3-4x};$$

$$4) y = 2\sqrt{3x-1}+1.$$

3.6.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{3x+1};$$

$$2) y = \sqrt{5-2x};$$

$$3) y = 2(3x-1)^2+1.$$

3.7.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = (|x-1|)^2;$$

$$2) y = \sqrt{|x|+2};$$

$$3) y = \frac{1}{|x|-3}.$$

3.8.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = (|x|+2)^2;$$

$$2) y = \sqrt{|x|-3};$$

$$3) y = \sqrt{2-|x|}.$$

3.9.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{|x+2|};$$

$$2) y = (|x-2|-1)^2;$$

$$3) y = \sqrt{|x-1|+2}.$$

3.10.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{|x-3|};$$

$$2) y = \sqrt{|x-2|-3};$$

$$3) y = \frac{1}{|x-1|-4}.$$

3.11.* Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a :

$$1) ||x|-1|=a;$$

$$3) |\sqrt{x}-2|=a?$$

$$2) (|x|-1)^2-1=a;$$

3.12.* Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a :

$$1) |x^2-1|=a;$$

$$3) (|x|-2)^2-3=a?$$

$$2) |(x+2)^2-3|=a;$$

3.13.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{2|x|-1};$$

$$2) y = \sqrt{1-3|x|};$$

$$3) y = \sqrt{|2x-1|}.$$

3.14.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{3|x|+1};$$

$$2) y = \sqrt{3x+1}.$$

3.15.** При яких значеннях параметра a рівняння $||x-1|-1|=x-a$ має безліч коренів?

3.16.** При яких значеннях параметра a рівняння $|3|x+1|-2|=a-x$ має 3 корені?

3.17.** При яких значеннях параметра a рівняння $|2|x+a|-1|=x-1$ має єдиний корінь?

3.18.** При яких значеннях параметра a рівняння $|3|x-a|-2|=2-x$ має єдиний корінь?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.19. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y - 7x = 3, \\ x^2 + 6xy - y^2 = 9; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + y + xy = -15, \\ x^2y + xy^2 = -54. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 100, \\ y + x = 8; \end{cases}$$

3.20. Із двох селищ, відстань між якими дорівнює 66 км, виїхали одночасно назустріч один одному два велосипедисти і зустрілися через 3 год. Знайдіть швидкість руху кожного велосипедиста, якщо один з них витрачає на весь шлях з одного селища в друге на 1 год 6 хв більше за другого учасника руху.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

3.21. Виразіть:

- із рівності $y = \frac{x+7}{3}$ змінну x через змінну y ;
- із рівності $y = \frac{10}{x-2} + 6$ змінну x через змінну y ;
- із рівності $y = \frac{\sqrt{x+2}}{5} - 1$ змінну x через змінну y .

4. Обернена функція

На рисунках 4.1, 4.2 зображено графіки функцій f і g .

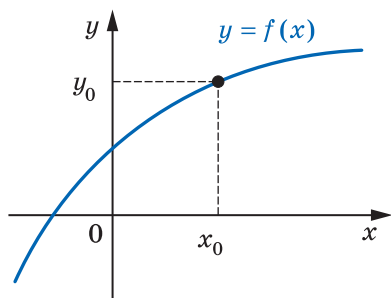


Рис. 4.1

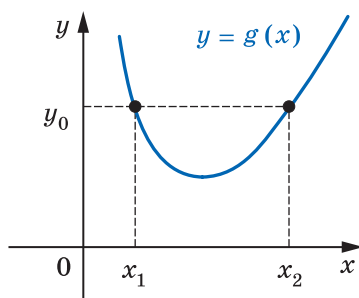


Рис. 4.2

Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції f не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу $y_0 \in E(f)$ відповідає єдине число $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція g такої властивості не має. Справді, з рисунка 4.2 видно, що значенню y_0 відповідають два значення аргументу x_1 і x_2 такі, що $y_0 = g(x_1)$ і $y_0 = g(x_2)$.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **оборотною**, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.

Функція f (рис. 4.1) є оборотною. Функція g (рис. 4.2) не є оборотною.

Функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 4.3).

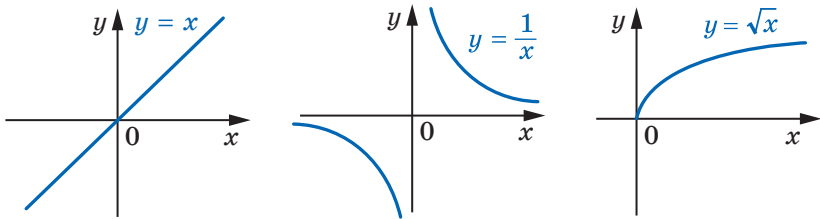


Рис. 4.3

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

Теорема 4.1. Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.

Доведення. Припустимо, що існує зростаюча функція f , яка не є оборотною. Тоді знайдеться $y_0 \in E(f)$, для якого існують x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Разом з тим функція f — зростаюча, і з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Отримали суперечність.

Аналогічно можна розглянути випадок, коли функція f є спадною. ◀

Зазначимо, що твердження, обернене до сформульованого в теоремі 4.1, не є правильним, тобто не будь-яка оборотна функція є зростаючою (спадною). Наприклад, на рисунку 4.4 зображено графік оборотної функції, яка не є ні зростаючою, ні спадною.

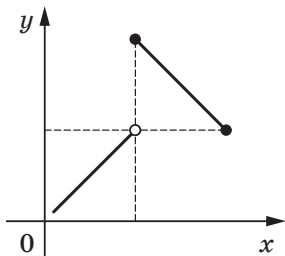


Рис. 4.4

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблично:

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функція f є оборотною.

Поміняємо рядки таблиці місцями та розглянемо функцію $y = g(x)$, задану отриманою таблицею:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Функції f і g зв'язані такими властивостями:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$, $g(\sqrt{5}) = 5$;

$f(6) = \sqrt{6}$, $g(\sqrt{6}) = 6$;

$f(7) = \sqrt{7}$, $g(\sqrt{7}) = 7$.

Ці рівності означають, що коли $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$.

Означення. Функції f і g називають **взаємно оберненими**, якщо:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ із рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

У таких випадках говорять, що функція g є **оберненою** до функції f , а функція f — **оберненою** до функції g . Функції f і g називають **взаємно оберненими**.

Таблично задані функції f і g , які розглянуто вище, є прикладами взаємно обернених функцій.

Зазначимо, що другу умову в означенні взаємно обернених функцій можна замінити на таку: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ із рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f(g(x_0)) = x_0$.

ПРИКЛАД ■ Доведіть, що функції $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = \frac{x+1}{2}$ є

взаємно оберненими.

Розв'язання. Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Справді, $g(y_0) = \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0$. ◀

Коли функція f не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї. Будь-яка оборотна функція має обернену.

Нехай f — оборотна функція, а функція g — обернена до неї. Функція f — це деяке правило, що дає змогу за значеннями змінної x із множини $D(f)$ знайти відповідне значення змінної y із множини $E(f)$. Тоді з означення взаємно обернених функцій випливає, що обернена функція g — це правило, згідно з яким за значеннями змінної y можна знайти відповідне значення змінної x .

У розглянутому вище прикладі було доведено, що оберненою до функції $y = 2x - 1$ є функція $y = \frac{x+1}{2}$. Проте розв'язання цієї задачі не розкриває, як за даною функцією знайти обернену до неї. Покажемо, як це можна зробити, на прикладі функції $y = 2x - 1$. Функція $y = 2x - 1$ зростаюча, тому вона є оборотною.

Щоб визначити обернену функцію, треба задати правило, згідно з яким за кожним значенням змінної y можна знайти таке значення змінної x , що $y = 2x - 1$.

$$\text{Маємо: } 2x = y + 1, \quad x = \frac{y+1}{2}.$$

Остання рівність задає функцію з аргументом y і залежною змінною x .

Традиційно незалежну змінну позначають літерою x , а залежну — літерою y . Дотримуючись цих позначень, можна сказати, що ми знайшли функцію, яку задано формулою $y = \frac{x+1}{2}$. Вона і є шуканою.

Розглянемо ще один приклад. Функція $y = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $y = x^2$ є **оборотною на множині** $[0; +\infty)$. Знайдемо функцію, обернену до функції f .

Маємо: $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$. Звідси $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$. Рівність $\sqrt{y} = x$ задає функцію з аргументом y і залежною змінною x .

Скориставшись традиційними позначеннями, отримаємо функцію $y = \sqrt{x}$, обернену до функції f .

Теорема 4.2. *Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.*

Доведення. Нехай точка $M(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Тоді $b = f(a)$. Якщо функція g є оберненою до функції f , то $g(b) = a$, тобто точка $N(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$.

Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$.

Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються та належать прямій $y = x$.

При $a \neq b$ маємо (рис. 4.5): $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, тобто точка O рівновіддалена від кінців відрізка MN , а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка MN . Середина K відрізка MN має координати $(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2})$, тобто належить прямій $y = x$.

Отже, пряма $y = x$ є серединним перпендикуляром відрізка MN . ◀

Доведену теорему ілюструють графіки взаємно обернених функцій, які ми розглянули вище (рис. 4.6).

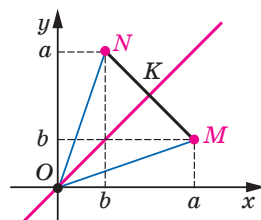


Рис. 4.5

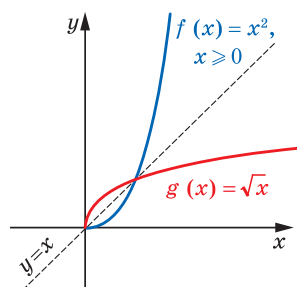
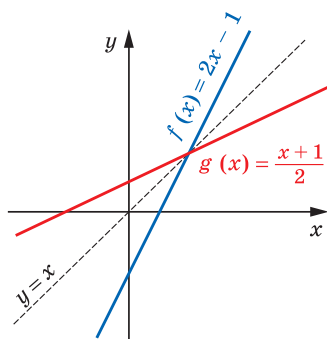


Рис. 4.6

Теорема 4.3. Якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція g є також зростаючою (спадною).

Доведення. Припустимо, що функція f зростаюча, але обернена до неї функція g не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливатиме нерівність $g(y_1) \geq g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$, тому $x_1 \geq x_2$. Оскільки функція f зростаюча, то $f(x_1) \geq f(x_2)$, тобто $y_1 \geq y_2$. Отримали суперечність.

Для спадної функції міркуємо аналогічно. ◀



1. Яку функцію називають оборотною?
2. Сформулюйте теорему про оборотність зростаючої (спадної) функції.
3. Які дві функції називають взаємно оберненими?
4. Як розташовані графіки взаємно обернених функцій?
5. Якою є функція, обернена до зростаючої функції? до спадної функції?

ВПРАВИ

4.1.° Доведіть, що дана функція не є оборотною:

$$1) y = |x|; \quad 2) y = \frac{1}{x^4}; \quad 3) y = 5.$$

4.2.° Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:

$$1) f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \quad g(x) = 3x - 1;$$

$$2) f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = x^2 - 2, \quad D(g) = [0; +\infty).$$

4.3.° Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:

$$1) f(x) = 4x + 2, \quad g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2};$$

$$2) f(x) = (x-3)^2, \quad D(f) = [3; +\infty), \quad g(x) = \sqrt{x} + 3.$$

4.4.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

$$1) y = 3x - 1; \quad 2) y = \frac{1}{x}; \quad 3) y = \frac{1}{2x+1}.$$

4.5.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

$$1) y = 0,2x + 3; \quad 2) y = \frac{1}{x-1}; \quad 3) y = \frac{4}{x+2}.$$

4.6.* Знайдіть функцію, обернену до даної:

$$1) y = 2\sqrt{x} - 1; \quad 2) y = x^2, \quad D(y) = (-\infty; 0].$$

4.7.* Знайдіть функцію, обернену до даної:

$$1) y = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad 2) y = \sqrt{x^2 - 4}, \quad D(y) = [2; +\infty).$$

4.8.* Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

$$1) y = -0,5x + 2; \quad 2) y = \sqrt{x+1}; \quad 3) y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 2x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

4.9.* Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

$$1) y = 3x - 1; \quad 2) y = x^2 - 4, \quad \text{якщо } x \geq 0.$$

4.10.** Доведіть, що функція, обернена до непарної функції, також є непарною.

4.11.** Нехай g — функція, обернена до функції $f(x) = x^5 + 6x^3$.

- 1) Знайдіть $g(7)$.
- 2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = -1$.
- 3) Скільки коренів має рівняння $g(x) = c$ залежно від значення параметра c ?

4.12.** Нехай g — функція, обернена до функції $f(x) = x^3 + \sqrt{x-2}$.

- 1) Знайдіть $g(28)$.
- 2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = 1$.
- 3) Чи існує таке значення c , що рівняння $g(x) = c$ має два корені?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

4.13. Розв'яжіть нерівність:

- | | | |
|-----------------------|--|--------------------------------------|
| 1) $(x-5)^2 > 0$; | 4) $(x-5)^2 \leq 0$; | 7) $\frac{x+5}{x+5} > \frac{1}{2}$; |
| 2) $(x-5)^2 \geq 0$; | 5) $\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^2 > 0$; | 8) $\frac{x^2+1}{x^2} \geq 0$; |
| 3) $(x-5)^2 < 0$; | 6) $\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^2 \geq 0$; | 9) $\frac{x^2}{x^2+1} \geq 0$. |

4.14. Яким числом, додатним чи від'ємним, є значення виразу $x-2$, якщо:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $x \in (2; +\infty)$; | 3) $x \in (-\infty; -3)$; |
| 2) $x \in (-3; -2)$; | 4) $x \in (5; 9)$? |

4.15. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1) $x^2 + x - 6$; | 3) $2x^2 + 9x - 18$; |
| 2) $35 - 2x - x^2$; | 4) $5x^2 - 16x + 3$. |

5. Метод інтервалів

На рисунку 5.1 зображено графік деякої функції f , у якої $D(f) = \mathbb{R}$ і нулями є числа x_1 , x_2 і x_3 . Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

А чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки зна-

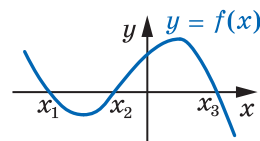


Рис. 5.1

косталості? Відповідь на це питання заперечна. Для функції g , графік якої зображено на рисунку 5.2, проміжок $(x_2; x_3)$ не є проміжком знакосталості. Справді, якщо $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а якщо $x \in [x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$.

Принципова відмінність між функціями f і g полягає в тому, що графіком функції f є **неперервна крива**, а графік функції g такої властивості не має. Говорять, що функція f **неперервна в кожній точці області визначення**, або **неперервна на $D(f)$** . Функція g у точці $x_0 \in D(g)$ має **розрив**.

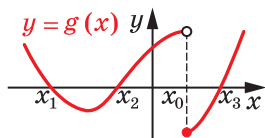


Рис. 5.2

Таке уявлення про неперервну функцію інтуїтивно зрозуміле. Детальніше з неперервними функціями ви ознайомитеся в § 5.

Для подальших міркувань нам буде потрібна така теорема.

Теорема 5.1. *Якщо функція неперервна на деякому проміжку і не має на ньому нулів, то вона на цьому проміжку зберігає сталий знак.*

Наприклад, функція $y = x^2 - 1$ неперервна на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ і не має на них нулів. Отже, розглядувана функція на вказаних проміжках зберігає знак (рис. 5.3).

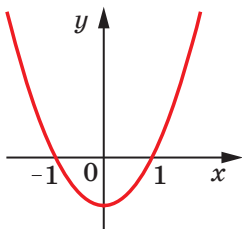


Рис. 5.3

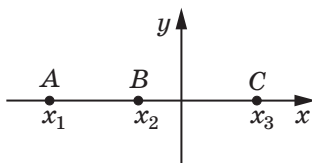


Рис. 5.4

Теорема 5.1 є основою загального методу розв'язування нерівностей виду $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$, де f — функція, неперервна на $D(f)$.

Роз'яснимо застосування цього методу на прикладі функції, графік якої зображено на рисунку 5.1.

Уявимо собі, що із цього рисунка «зникли» всі точки графіка функції f , за винятком точок $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_3; 0)$ (рис. 5.4). Кожний із проміжків $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не містить нулів функції f .

Функція f є неперервною на цих проміжках. Отже, за теоремою 5.1 зазначені проміжки є проміжками знакосталості функції f .

Залишається з'ясувати, якого знака набувають значення функції f на кожному із зазначених проміжків. Це можна зробити за допомогою «пробних точок».

Нехай, наприклад, $a \in (-\infty; x_1)$ і $f(a) > 0$. Оскільки $(-\infty; x_1)$ — проміжок знакосталості функції, то для будь-якого $x \in (-\infty; x_1)$ значення функції має той самий знак, що $f(a)$, отже, виконується нерівність $f(x) > 0$. Вибираючи по одній точці на кожному проміжку знакосталості та знаходячи значення функції в цій точці, можна визначити знак функції на розглядуваних проміжках.

Описаний метод розв'язування нерівностей називають **методом інтервалів**.

Наведена нижче теорема дає змогу застосовувати метод інтервалів для нерівностей виду $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ або $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени.

Теорема 5.2. Функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени, є неперервною на $D(y)$.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ неперервна в кожній точці множини $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, тобто на $D(y)$.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $(x + 3)(x - 1)(x - 2) > 0$.

Розв'язання. Числа -3 , 1 і 2 є нулями функції $f(x) = (x + 3) \times (x - 1)(x - 2)$, яка є неперервною на $D(f) = \mathbb{R}$. Ці числа розбивають множину \mathbb{R} на проміжки знакосталості функції f : $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$ (рис. 5.5).

За допомогою «пробних точок» визначимо знаки функції f на зазначених проміжках.

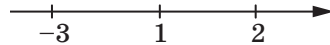


Рис. 5.5

Маємо:

$3 \in (2; +\infty)$; $f(3) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (2; +\infty)$;

$\frac{3}{2} \in (1; 2)$; $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (1; 2)$;

$0 \in (-3; 1)$; $f(0) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (-3; 1)$;

$-4 \in (-\infty; -3)$; $f(-4) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (-\infty; -3)$.

Результати дослідження знака функції f показано на рисунку 5.6.

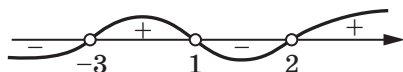


Рис. 5.6

Тепер можна записати відповідь.

Відповідь: $(-3; 1) \cup (2; +\infty)$. ◀

Досліджувати знак функції можна усно, фіксуючи результати у вигляді схеми, показаної на рисунку 5.6.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Розв'язання. Областю визначення функції $f(x) = \frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$ є множина $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 4) \cup (4; +\infty)$. Функ-

ція f є неперервною на кожному з проміжків $(-\infty; -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}; 4)$, $(4; +\infty)$, тому нулі -2 , 1 , 5 функції f розбивають $D(f)$ на такі проміжки знакосталості: $(-\infty; -2)$, $(-2; -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}; 1)$, $(1; 4)$, $(4; 5)$, $(5; +\infty)$.

Результат дослідження знака функції f на кожному із цих проміжків показано на рисунку 5.7.

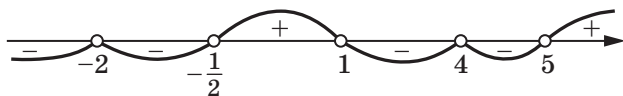


Рис. 5.7

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup (-2; -\frac{1}{2}) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$. ◀

За допомогою методу інтервалів можна розв'язувати й нестрогу нерівність $f(x) \geq 0$ (або $f(x) \leq 0$). Множина розв'язків такої нерівності — це об'єднання множини розв'язків нерівності $f(x) > 0$ (або $f(x) < 0$) і множини коренів рівняння $f(x) = 0$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\frac{4x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$.

Розв'язання. Радимо, якщо це можливо, многочлени, записані в чисельнику та знаменнику дроби, розкласти на множники. Тоді набагато зручніше досліджувати знак функції на проміжках знакосталості.

$$\text{Маємо: } \frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} \geq 0.$$

Установлюємо (рис. 5.8), що множиною розв'язків нерівності $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} > 0$

є множина $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

$$\text{Рівняння } \frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} = 0 \text{ має єдиний корінь } x = -\frac{1}{2}.$$

Об'єднавши множини розв'язків рівняння і нерівності, отримаємо відповідь.

$$\text{Відповідь: } (-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}. \blacktriangleleft$$

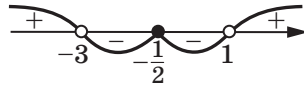


Рис. 5.8



1. Чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості?
2. Яку властивість має функція, що є неперервною на проміжку та не має на ньому нулів?
3. Опишіть, як розв'язувати нерівності методом інтервалів.

ВПРАВИ

5.1.° Розв'яжіть нерівність:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| 1) $x(x-3)(x+2) < 0$; | 3) $(2x-1)(3-x)(x+1) < 0$; |
| 2) $(x+7)(x+5)(x-9) \leq 0$; | 4) $(x-6)(7x+1)(2-9x) \geq 0$. |

5.2.° Розв'яжіть нерівність:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 1) $(x+3)(x-1)(x+4) < 0$; | 3) $(1-3x)(x+2)(3-x) < 0$; |
| 2) $(x-7)(x+8)(x-12) \geq 0$; | 4) $x(5-x)(6-x) \leq 0$. |

5.3.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\frac{x-8}{x+7} < 0$; | 2) $\frac{x+9}{x-11} > 0$; | 3) $\frac{x+5,2}{x-1,4} \leq 0$; |
|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|

$$4) \frac{5-x}{x-6} \geq 0; \quad 5) \frac{(x+15)(x-2)}{x-15} \geq 0; \quad 6) \frac{x-3,8}{(x+5)(x-16)} \leq 0.$$

5.4.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) \frac{x+3}{x-1} > 0; \quad 3) \frac{(x-2)(x+1)}{x-4} < 0; \quad 5) \frac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)} > 0;$$

$$2) \frac{x-4}{x} \geq 0; \quad 4) \frac{(x+1,2)(x-1,6)}{x-1,4} \leq 0; \quad 6) \frac{(x+1)(3-x)}{(3x-2)(4-3x)} \geq 0.$$

5.5.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2-4}{x^2-9} > 0; \quad 2) \frac{x^2-3x}{x^2-8x+7} \leq 0; \quad 3) \frac{2x^2-5x+2}{x^2-3x-4} \geq 0.$$

5.6.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) (x^2+7x)(x^2-7x+6) < 0; \quad 3) \frac{3x^2+2x-1}{4x^2-x-3} \geq 0.$$

$$2) \frac{x^2-x-12}{x^2-36} \leq 0;$$

5.7.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) (2x+1)(x-3)(x^2+4) < 0; \quad 2) (2-x)(3x+5)(x^2-x+1) > 0.$$

5.8.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x^4+1)(5-6x)(x-2) < 0; \quad 2) (3x^2-5x-2)(2x^2+x+1) < 0.$$

5.9.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x-4)^2(x^2-7x+10) < 0; \quad 3) (x-4)^2(x^2-7x+10) > 0;$$

$$2) (x-4)^2(x^2-7x+10) \leq 0; \quad 4) (x-4)^2(x^2-7x+10) \geq 0;$$

5.10.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x-3)^2(x^2+x-2) < 0; \quad 3) (x-3)^2(x^2+x-2) > 0;$$

$$2) (x-3)^2(x^2+x-2) \leq 0; \quad 4) (x-3)^2(x^2+x-2) \geq 0;$$

5.11.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2+x-20}{x^2-6x+9} > 0; \quad 3) \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} > 0; \quad 5) \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} < 0;$$

$$2) \frac{x^2+x-20}{x^2-6x+9} \leq 0; \quad 4) \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} \geq 0; \quad 6) \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} \leq 0.$$

5.12.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2+3x}{x-5} \geq \frac{28}{x-5}; \quad 3) \frac{x}{x+3} > \frac{1}{2}; \quad 5) \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} > 1;$$

$$2) \frac{1}{x} < 1; \quad 4) \frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}; \quad 6) \frac{x-3}{x+3} \leq \frac{2x-5}{4x-3}.$$

5.13.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{1}{x+2} \leq 1; \quad 2) \frac{x}{x+1} \geq 2; \quad 3) \frac{5x+8}{4-x} < 2; \quad 4) \frac{2}{x+3} \geq \frac{1}{x-1}.$$

5.14.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(1 - 3x)^3 (x + 2)^2 (x + 4)^5 (x - 3) > 0$;
- 2) $(x^2 + 2x - 15)(x^2 - 4x + 3)(x - 1) \leq 0$.

5.15.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(3 - x)^3 (x + 2)^2 (x - 1)(2x - 5) < 0$;
- 2) $(x^2 - 4)(x^2 + x - 2) \leq 0$.

5.16.** Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $\frac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5} > 0$;
- 2) $\frac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2} \geq 0$;
- 3) $\frac{x^5 |3x-1| (x+3)}{x-2} \leq 0$;
- 4) $\frac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3 (x+1)^2} \leq 0$.

5.17.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3} \leq 0$;
- 2) $\frac{(x-1)^2 (x+2)^3}{x-5} \geq 0$;
- 3) $\frac{x^2 (x^2 - 1)}{x-4} > 0$.

5.18.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}$;
- 2) $\frac{12}{x^2-4} - \frac{7}{x^2-9} \leq 0$.

5.19.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{2(x-3)}{x(x-6)} < \frac{1}{x-1}$;
- 2) $\frac{2x+3}{x^2+x-12} < \frac{1}{2}$.

5.20.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} \leq 0$;
- 2) $(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$;
- 3) $(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x^2 - 7x + 10} \leq 0$;
- 4) $(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x^2 - 7x + 10} \geq 0$.

5.21.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} > 0$;
- 2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} \leq 0$;
- 3) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} > 0$;
- 4) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} \geq 0$.

5.22.** Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x-3)(x-a) < 0$;
- 2) $(x-3)(x-a)^2 > 0$;
- 3) $(x-3)(x-a)^2 \geq 0$;
- 4) $(x-a)(x+5)^2 < 0$;
- 5) $(x-a)(x+5)^2 \leq 0$;
- 6) $\frac{(x+1)(x-a)}{x-a} \leq 0$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

5.23. Розкладіть на множники вираз:

- 1) $x^3 + 8$;
- 2) $16 - x^4$;
- 3) $2x^4 + 9x^2 - 18$;
- 4) $x^3 - 4x^2 + 2x - 8$.

6. Ділення многочленів. Теорема Безу

Ви вмієте додавати, віднімати та множити многочлени. У цьому пункті ми введемо дію ділення многочленів.

Означення. Говорять, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на тотожно не рівний нулю многочлен $B(x)$, якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.

Многочлен $A(x)$ називають діленим, многочлен $B(x)$ — дільником, многочлен $Q(x)$ — часткою.

Якщо многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$, то це позначають так: $A(x) : B(x)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Многочлен $x^3 + 1$ ділиться націло на многочлен $x + 1$. Справді, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Тут діленим є многочлен $x^3 + 1$, дільником — многочлен $x + 1$, часткою — многочлен $x^2 - x + 1$.

Многочлен $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$ ділиться націло на многочлен $2x^2 - x + 1$. Справді, $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x = (2x^2 - x + 1)(3x^2 - x)$.

Зауважимо, що коли ділене — це нульовий многочлен, то він ділиться націло на будь-який многочлен, який тотожно не дорівнює нулю. При цьому частка дорівнює нульовому многочлену.

Пошук частки від ділення двох многочленів можна здійснювати за алгоритмом ділення «куточком», аналогічно тому, як це роблять при діленні чисел:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 1 \quad | \quad x + 1 \\
 \underline{x^3 + x^2} \quad | \quad x^2 - x + 1 \\
 -x^2 + 1 \\
 \underline{-x^2 - x} \\
 -x + 1 \\
 \underline{-x + 1} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x \quad | \quad 2x^2 - x + 1 \\
 \underline{6x^4 - 3x^3 + 3x^2} \quad | \quad 3x^2 - x \\
 -2x^3 + x^2 - x \\
 \underline{-2x^3 + x^2 - x} \\
 0
 \end{array}$$

Якщо $A(x) : B(x)$, тобто існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, і многочлен $A(x)$ ненульовий, то ненульовими є многочлени $B(x)$ і $Q(x)$, причому степінь многочлена $A(x)$ дорівнює сумі степенів многочленів $B(x)$ і $Q(x)$. Отже, для того щоб ненульовий многочлен $A(x)$ ділився націло на ненульовий многочлен $B(x)$, необхідно, щоб степінь діленого був не меншим від степеня дільника. Проте ця

умова не є достатньою. Так, многочлен $x^3 + 1$, степінь якого дорівнює 3, не ділиться націло на многочлен $x - 1$, степінь якого дорівнює 1. Справді, якби існував многочлен $Q(x)$ такий, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконувалася б рівність $x^3 + 1 = (x - 1) Q(x)$, то при $x = 1$ отримали б неправильну рівність $1^3 + 1 = 0$.

Теорема 6.1. Для будь-якого многочлена $A(x)$ і ненульового многочлена $B(x)$ існує єдина пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$ таких, що

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $B(x)$ або $R(x)$ — нульовий многочлен.

У цій рівності многочлен $Q(x)$ називають **неповною часткою**, а многочлен $R(x)$ — **остачею**.

Доведення цієї теореми виходить за межі розглядуваного курсу.

Розглянемо многочлени $A(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 1$ і $B(x) = x^2 - 3x + 2$. Знайдемо для цих многочленів неповну частку й остачу. Це можна зробити за допомогою ділення «куточком»:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - x^3 + x^2 - 1 & x^2 - 3x + 2 \\ \hline - 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 & \\ \hline 5x^3 - 3x^2 - 1 & \\ - 5x^3 + 15x^2 - 10x & \\ \hline 12x^2 - 10x - 1 & \\ - 12x^2 + 36x - 24 & \\ \hline 26x - 25 & \text{(остача)} \end{array}$$

Тепер можна записати:

$$2x^4 - x^3 + x^2 - 1 = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 12) + 26x - 25.$$

Означення. Число α називають **коренем многочлена $A(x)$** , якщо $A(\alpha) = 0$.

Корінь многочлена $A(x)$ — це корінь рівняння $A(x) = 0$.

Легко знайти множину коренів рівняння

$$(3x - 7)(5x + 1)(2x - 9)(x + 1) = 0.$$

Проте якщо ліву частину рівняння подати у вигляді многочлена $30x^4 - 169x^3 + 75x^2 + 337x + 63$, то задача пошуку його коренів стає непростою.

Таким чином, під час розв'язування рівнянь виду $A(x) = 0$, де $A(x)$ — ненульовий многочлен, важливо навчитися виділяти в многочлені лінійний множник, тобто подавати многочлен у вигляді

добутку $A(x) = (x - \alpha) B(x)$, де $B(x)$ — деякий многочлен, степінь якого на 1 менший від степеня многочлена $A(x)$.

Цьому сприятимуть такі теореми.

Теорема 6.2 (теорема Безу). *Остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює $A(\alpha)$.*

Доведення. Оскільки степінь дільника (двочлена $x - \alpha$) дорівнює 1, то степінь остачі має дорівнювати нулю або остача має бути нульовим многочленом, тобто шукана остача — це деяке число r . Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ маємо:

$$A(x) = (x - \alpha) Q(x) + r.$$

Поклавши в цій рівності $x = \alpha$, отримаємо:

$$A(\alpha) = (\alpha - \alpha) Q(\alpha) + r.$$

Звідси $A(\alpha) = r$. ◀

Теорема 6.3. *Число α є коренем многочлена $A(x)$ тоді й тільки тоді, коли многочлен $A(x)$ ділиться націло на двочлен $x - \alpha$.*

Доведення. Нехай $A(\alpha) = 0$. Доведемо, що $A(x) \div (x - \alpha)$.

За теоремою Безу $A(\alpha)$ є остачею від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$. Проте $A(\alpha) = 0$, отже, $A(x) \div (x - \alpha)$.

Нехай тепер $A(x) \div (x - \alpha)$. Доведемо, що $A(\alpha) = 0$.

Оскільки $A(x) \div (x - \alpha)$, то остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює 0, тобто $A(\alpha) = 0$. ◀

Наслідок 1. *Якщо $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — множина коренів многочлена $A(x)$, то $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q(x)$, де $Q(x)$ — деякий многочлен.*

Доведіть цю теорему самостійно.

Наслідок 2. *Множина коренів многочлена степеня n містить не більше ніж n елементів.*

Доведіть цю теорему самостійно.



Етьєн Безу
(1730–1783)

Французький математик, основні роботи якого стосуються вищої алгебри. Викладав математику в училищі гардемаринів, Королівському артилерійському корпусі. Автор шеститомної праці «Курс математики».

Наслідок 3. Якщо множина коренів многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ містить більше ніж n елементів, то $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$, тобто цей многочлен тотожно дорівнює нулю.

Доведення. Якщо припустити, що даний многочлен ненульовий, то його степінь не перевищує n . Тоді множина його коренів не може містити більше n елементів. Отже, даний многочлен є нульовим. ◀

ПРИКЛАД 1 Остачі від ділення многочлена $P(x)$ на двочлени $x - 2$ і $x - 3$ відповідно дорівнюють 5 і 7. Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 - 5x + 6$.

Розв'язання. Оскільки степінь многочлена $x^2 - 5x + 6$ дорівнює 2, то степінь шуканої остачі не більший за 1 або остача є нульовим многочленом, а тому остача — це многочлен виду $ax + b$.

Маємо: $P(x) = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + ax + b$. Звідси

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)Q(x) + ax + b.$$

Підставимо по черзі в цю рівність $x = 2$ і $x = 3$. Отримуємо:

$$P(2) = 2a + b, \quad P(3) = 3a + b.$$

З урахуванням умови та теореми Безу $P(2) = 5$ і $P(3) = 7$. Тоді

$$\begin{cases} 2a + b = 5, \\ 3a + b = 7. \end{cases}$$

Звідси $a = 2$, $b = 1$. Отже, шуканою остачею є многочлен $2x + 1$.

Відповідь: $2x + 1$. ◀

Розглянемо многочлен $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Рівняння виду $A(x) = 0$ називають **цілим раціональним рівнянням**.

Числа a_0, a_1, \dots, a_n називають **коефіцієнтами** цілого раціонального рівняння, число a_0 — **вільним членом** цього рівняння.

Можна довести, що справедливою є така теорема.

Теорема 6.4. Якщо ціле раціональне рівняння із цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то він є дільником вільного члена.

Теорема 6.4 допомагає розв'язувати цілі раціональні рівняння із цілими коефіцієнтами, які мають цілі корені.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$.

Розв'язання. Щоб перевірити, чи має це рівняння цілі корені, випишемо всі дільники його вільного члена: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6.

Перевіркою встановлюємо, що $x = -1$ є коренем даного рівняння. Отже, многочлен $A(x)$, який стоїть у лівій частині рівняння, ділиться націло на двочлен $x + 1$, тобто рівняння можна переписати

так: $(x + 1)B(x) = 0$. Многочлен $B(x)$ можна знайти, виконавши ділення «куточком» многочлена $A(x)$ на двочлен $(x + 1)$. Отримуємо $B(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6$.

З'ясуємо, чи має цілі корені рівняння $2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 0$. Випишемо дільники вільного члена: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6.

Перевіркою встановлюємо, що число 3 є коренем цього рівняння. Тоді $B(x) = (x - 3)C(x)$. Діленням «куточком» знайдемо многочлен $C(x)$. Отримуємо $C(x) = 2x^2 - x + 2$.

Очевидно, що рівняння $C(x) = 0$ коренів не має. Таким чином, початкове рівняння має два корені -1 і 3.

Відповідь: -1; 3. ◀



1. У якому разі говорять, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$?
2. Якою є необхідна умова ділення націло одного многочлена на другий?
3. Сформулюйте теорему про ділення многочленів з остачею.
4. Що називають коренем многочлена?
5. Сформулюйте теорему Безу.
6. Сформулюйте необхідну і достатню умову, за якої число α є коренем многочлена $A(x)$.

ВПРАВИ

- 6.1.* Доведіть, що многочлен $x^4 - 1$ ділиться націло на многочлен $x^3 + x^2 + x + 1$.
- 6.2.* Доведіть, що многочлен $A(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$ ділиться націло на многочлен $B(x) = x^2 - x + 1$.
- 6.3.* Поділивши «куточком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:
 - 1) $A(x) = x^4 + x + 1$, $B(x) = x^2 + x + 1$;
 - 2) $A(x) = x^4 + x^2 + 1$, $B(x) = x + 5$.
- 6.4.* Поділивши «куточком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:
 - 1) $A(x) = x^7 - 1$, $B(x) = x^3 + x + 1$;
 - 2) $A(x) = x^3 + 5x^2 - 6x - 6$, $B(x) = x - 2$.
- 6.5.* Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:
 - 1) $A(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $B(x) = x - 1$;
 - 2) $A(x) = 2x^4 - 4x^3 - x - 1$, $B(x) = x + 2$.

- 6.6.*** Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на двочлен $B(x)$:
- 1) $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$, $B(x) = x + 2$;
 - 2) $A(x) = 5x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 1$, $B(x) = x - 1$.
- 6.7.*** Доведіть, що $(x^n - a^n) \div (x^k - a^k)$, якщо $n \div k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.
- 6.8.*** Доведіть, що многочлен, який тотожно дорівнює виразу $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$, де $n \in \mathbb{N}$, ділиться націло на многочлен, який тотожно дорівнює виразу $x(x + 1)(2x + 1)$.
- 6.9.*** Доведіть, що многочлен, який тотожно дорівнює виразу $(x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x + 1)^{2n} - 2$, де $n \in \mathbb{N}$, ділиться націло на многочлен $x^2 - x$.
- 6.10.**** При якому значенні параметра a остача від ділення многочлена $2x^4 - 3x^3 - ax^2 - x - 2$ на двочлен $x + 1$ дорівнює 3?
- 6.11.**** При яких значеннях параметра b многочлен $x^3 + 3x^2 - bx + 6$ ділиться націло на двочлен $x + 2$?
- 6.12.**** При яких значеннях параметрів a , b і c многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ ділиться націло на двочлени $x - 1$ і $x + 2$, а при діленні на двочлен $x + 1$ дає в остачі 10?
- 6.13.**** При яких значеннях параметрів a і b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + ab$ при діленні на двочлен $x - 2$ дає в остачі 15, а при діленні на двочлен $x + 1$ дає в остачі 0?
- 6.14.**** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$;
 - 2) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
 - 3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
 - 4) $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$.
- 6.15.**** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$;
 - 2) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$;
 - 3) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$;
 - 4) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$.
- 6.16.*** Доведіть, що вираз $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ ділиться націло на вираз $(a - b)(b - c)(c - a)$.
- 6.17.*** Доведіть, що вираз $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ділиться націло на вираз $x + y + z$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 6.18.** Одна людина, що працює, може виконати деяке виробниче завдання за 20 год, а друга — за 30 год. За який час вони виконають це завдання, працюючи разом?
- 6.19.** Через першу трубу басейн можна наповнити водою за 9 год, а через другу — за 12 год. Спочатку 3 год була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басейн?

7. Метод математичної індукції

Вивчаючи навколишній світ, ми часто робимо висновки за результатами спостережень і дослідів.

Загальні висновки, отримані на підставі вивчення окремих випадків, називають **індуктивними**, а сам метод таких міркувань — **індуктивним методом** або **індукцією** (від латин. *inductio* — наведення).

Наприклад, задовго до відкриття законів руху Землі люди дійшли висновку, що Сонце вранці встає на сході, а ввечері зникає за обрієм на заході. Цей висновок є індуктивним, адже він ґрунтувався лише на спостереженнях.

Звісно, за допомогою індукції не завжди можна дійти правильних висновків. Так, якщо у вашій і сусідній школах серед учителів початкових класів немає чоловіків, то це не означає, що в початкових класах працюють тільки жінки.

Незважаючи на те що індуктивні висновки до певної міри потрібно брати під сумнів, індуктивний метод може допомогти сформулювати правильні гіпотези.

Розглянемо два приклади.

- Спробуємо підмитити закономірність у поведінці сум n перших непарних натуральних чисел. Позначимо через S_n суму n перших непарних чисел. Домовимося, що $S_1 = 1$. Маємо:

$$S_1 = 1 = 1;$$

$$S_2 = 1 + 3 = 4;$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9;$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16;$$

$$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Числа 1, 4, 9, 16, 25 є квадратами послідовних натуральних чисел.

Можна зробити таке припущення: для будь-якого натурального n

$$S_n = n^2. \quad (1)$$

- Розглянемо значення многочлена $f(n) = n^2 - n + 41$ при значеннях n , які дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5. Маємо:

$$f(1) = 41 \text{ — просте число;}$$

$$f(2) = 43 \text{ — просте число;}$$

$$f(3) = 47 \text{ — просте число;}$$

$$f(4) = 53 \text{ — просте число;}$$

$$f(5) = 61 \text{ — просте число.}$$

Можна зробити таке припущення: для будь-якого натурального n значення многочлена $f(n)$ є простим числом.

Два наведених припущення є лише гіпотезами, які належить або довести, або спростувати.

Один зі способів спростувати гіпотезу — навести контрприклад. Для другого припущення такий контрприклад легко знайти. Маємо: $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ — складене число. Таким чином, гіпотезу спростовано.

Спроба знайти контрприклад для першого індуктивного висновку може привести до таких рівностей:

$$S_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2;$$

$$S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2;$$

$$S_8 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2.$$

Отримані рівності лише зміцнюють упевненість у тому, що висунута гіпотеза є правильною.

Зрозуміло, що обчислення суми із черговим доданком не наближує до доведення гіпотези: скільки б сум ми не обчислили, неможливо гарантувати, що серед нескінченної кількості сум, що залишаться, не трапиться така, для якої рівність (1) не виконується.

Щоб довести справедливість висловленої гіпотези, потрібно провести деякі загальні міркування.

Нехай рівність (1) є справедливою для k доданків, тобто

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

Розглянемо суму, яка містить $k + 1$ доданок:

$$S_{k+1} = \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)}_{S_k} + (2k + 1) = S_k + (2k + 1).$$

З урахуванням припущення $S_k = k^2$ маємо: $S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Наведені міркування гарантують, що коли рівність (1) є правильною для $n = k$, то вона залишається правильною і для $n = k + 1$.

Тепер можна стверджувати, що рівність (1) доведено для будь-якого натурального значення n . Пояснимо це.

Оскільки $S_1 = 1$, то рівність (1) є правильною для $n = 1$. Отже, вона є правильною для $n = 1 + 1 = 2$, а тоді вона є правильною при $n = 2 + 1 = 3$, при $n = 3 + 1 = 4$, при $n = 4 + 1 = 5$ і т. д. Таким чином можна досягти будь-якого натурального значення n . Отже, рівність (1) є правильною при всіх натуральних значеннях n .

Розглянутий метод доведення називають методом математичної індукції. У загальному вигляді його можна описати так.

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n .

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин (теорем):

1) доводять (перевіряють) справедливність твердження для $n = 1$;

2) роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, і на підставі цього доводять, що воно є правильним для $n = k + 1$.

Теорему, яку доводять у першій частині, називають **базою індукції**.

Наприклад, під час доведення рівності (1) базою індукції було твердження, що рівність (1) виконується при $n = 1$.

Теорему, яку доводять у другій частині методу, називають **індуктивним переходом**.

ПРИКЛАД 1 Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання. Для $n = 1$ маємо: $S_1 = \frac{1}{2!}$.

$$\text{Для } n = 2 \text{ маємо: } S_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{3!}.$$

$$\text{Для } n = 3 \text{ маємо: } S_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{23}{4!}.$$

$$\text{Для } n = 4 \text{ маємо: } S_4 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} = \frac{119}{5!}.$$

Можна зробити таке припущення: для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність

$$S_n = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}. \quad (2)$$

Доведемо цю гіпотезу методом математичної індукції.

Раніше ми перевірили справедливність формули (2) для $n = 1$, тим самим довівши теорему «база індукції».

Тепер доведемо теорему «індуктивний перехід».

Нехай формула (2) є правильною при $n = k$, тобто $S_k = \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!}$.

Отримуємо:

$$S_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}}_{S_k} + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)! - 1}{(k+2)!}.$$

Отже, припустивши, що формула (2) є правильною при $n = k$, ми довели, що вона є правильною і при $n = k + 1$.

Теорему «індуктивний перехід» доведено.

Таким чином, гіпотеза (2) є правильною. ◀

Отриману формулу можна подати в такому вигляді: $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Зауважимо, що при необмеженому збільшенні n значення виразу

$\frac{1}{(n+1)!}$ прямує до числа 0, а отже, значення суми S_n прямує до

числа 1. Ці міркування дають змогу розглядати суму $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} +$

$+\dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$, яка містить безліч доданків, і вважати, що її значення дорівнює 1.

Суму виду $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, де (a_n) — нескінченна числова послідовність, називають **рядом**. Нагадаємо, що з рядами ви стикалися під час вивчення нескінченної геометричної прогресії, у якій модуль знаменника менший від одиниці.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ значення виразу $5^n - 3^n + 2n$ кратне 4.

Розв'язання. При $n = 1$ отримуємо $5^1 - 3^1 + 2 \cdot 1 = 4$. Оскільки число 4 ділиться націло на 4, тобто $4 \div 4$, то теорему «база індукції» доведено.

Нехай при $n = k$ твердження є правильним, тобто

$$(5^k - 3^k + 2k) \div 4.$$

Доведемо, що тоді це твердження є правильним при $n = k + 1$, тобто

$$(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2(k+1)) \div 4.$$

Для доведення достатньо показати, що різниця $(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2k + 2) - (5^k - 3^k + 2k)$ кратна 4.

Перепишемо цю різницю таким чином:

$$5^k(5-1) - 3^k(3-1) + 2 = 4 \cdot 5^k - 2(3^k - 1).$$

Оскільки 3^k — непарне число, то $3^k - 1$ — парне число, тобто $(3^k - 1) \div 2$. Через це значення отриманого виразу кратне 4.

Отже, використовуючи метод математичної індукції, доведено, що твердження $5^n - 3^n + 2n \div 4$, $n \in \mathbb{N}$, є правильним. ◀

Методом математичної індукції можна користуватися і в тих випадках, коли $n \geq n_0$, де $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$. У цьому разі теорему «база індукції» доводять (перевіряють) для $n = n_0$.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і $n > 4$ виконується нерівність $2^n > n^2$.

Розв'язання. При $n = 5$ маємо правильну нерівність $2^5 > 5^2$.

Нехай нерівність, яку треба довести, є правильною при $n = k$, тобто $2^k > k^2$, де $k \in \mathbb{N}$, $k > 4$. Маємо:

$$2 \cdot 2^k > 2k^2;$$

$$2^{k+1} > 2k^2.$$

Легко показати (переконайтеся в цьому самостійно), що при $k > 1 + \sqrt{2}$, а тим більше при $k > 4$, справджується нерівність $2k^2 > (k+1)^2$. Звідси

$$2^{k+1} > (k+1)^2.$$

Ми показали, що при $n = 5$ виконується теорема «база індукції», і при $n > 4$ довели теорему «індуктивний перехід». Отже, розглядувана нерівність є правильною при будь-яких натуральних n таких, що $n > 4$. ◀



1. Які висновки називають індуктивними?
2. Опишіть схему доведення методом математичної індукції.
3. З яких двох теорем складається доведення методом математичної індукції?

ВПРАВИ

7.1.° Числа 24, 44, 64, 84 кратні 4. Чи можна на цій підставі зробити висновок, що число, яке закінчується цифрою 4, кратне 4?

7.2.° Доведіть, що значення многочлена $f(n) = n^2 + n + 17$ є простим числом при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$. Чи можна на цій підставі зробити висновок, що $f(n)$ є простим числом при будь-якому натуральному значенні n ?

7.3.* Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

$$1) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$2) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2;$$

$$3) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$4) 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

7.4.* Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

$$1) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

$$2) 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2;$$

$$3) 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

7.5.** Виведіть формулу для обчислення суми

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

7.6.** Виведіть формулу для обчислення суми

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

7.7.** Доведіть нерівність $2^n > 2n + 1$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

7.8.** Доведіть нерівність $3^n > 4n + 1$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

7.9.** Доведіть, що для будь-якого натурального n :

$$1) (3^{2n+1} + 2^{n+2}) \div 7; \quad 2) (6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}) \div 17.$$

7.10.** Доведіть, що для будь-якого натурального n :

$$1) (7^{n+1} + 8^{2n-1}) \div 19; \quad 2) (7 \cdot 24^n - 5 \cdot 13^n - 2^{n+1}) \div 11.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.11. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6. \end{cases}$$

7.12. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -\frac{6}{x}, \text{ якщо } x \leq -1, \\ x^2, \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$ Користуючись

побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання даної функції.



ЛЬВІВСЬКА МАТЕМАТИЧНА ШКОЛА

Ви тримаєте в руках підручник «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилася нове словосполучення – «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста — математичний аналіз вивчає функції. Цього року ви починаєте ознайомлюватися з елементами аналізу: вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їхні властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині ХХ ст. вивчення певних класів функцій привело до появи нової математичної дисципліни — функціонального аналізу. Важливу, фактично головну, роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30 рр. ХХ ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його наукових закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юлій Шаудер, Гуго Штейнгауз і багато інших. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як Львівська математична школа. Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.



Стефан Банах
(1892–1945)



Підручник Банаха
«Курс функціонального аналізу»

Сьогодні світова математична спільнота із цілковитою підставою вважає С. Банаха засновником функціонального аналізу. Один із перших у світі підручників із цієї дисципліни написав саме Банах. Багато результатів Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені вченим множини одержали назву «простори Банаха» й зараз входять до необхідного мінімуму знань усіх, хто навчається у вищому навчальному закладі з математики, фізики, кібернетики та ін.

Розповідають, що багато теорем львівської математики доводили... у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували то кухлі пива, то вечерю в ресторані. Наприклад, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Проблеми, порушені в «Шкотській книзі», є настільки важливими та складними, що кожний, кому вдається розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.



Вручення гусака



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Підмножина

Множину B називають підмножиною множини A , якщо кожний елемент множини B є елементом множини A .

Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають власною підмножиною множини A .

Операції над множинами

Перерізом множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A , і множині B .

Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин: або множині A , або множині B .

Різницею множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, які належать множині A , але не належать множині B . У випадку, коли множина B є підмножиною множини A , різницю $A \setminus B$ називають доповненням множини B у множині A .

Функція

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y .

Найбільше і найменше значення функції

Число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

Число $f(x_0)$ називають найменшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.

Парні і непарні функції

Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Область визначення парної (непарної) функції є симетричною відносно початку координат.

Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.

Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.

Перетворення графіків функцій

Графік функції $y = f(kx)$ можна отримати з графіка функції $y = f(x)$ у результаті стискання в k разів до осі ординат, якщо

$k > 1$, або в результаті розтягнення в $\frac{1}{k}$ раза від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.

Графік функції $y = f(-x)$ можна отримати, відобразивши графік функції $y = f(x)$ симетрично відносно осі ординат.

Оборотна функція

Функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.

Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.

Взаємно обернені функції

Функції f і g називають взаємно оберненими, якщо:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ із рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

Якщо функція є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція є також зростаючою (спадною).

Ділення многочленів

Говорять, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на тотожно не рівний нулю многочлен $B(x)$, якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.

Многочлен $A(x)$ називають діленим, многочлен $B(x)$ — дільником, многочлен $Q(x)$ — часткою.

Для будь-якого многочлена $A(x)$ і ненульового многочлена $B(x)$ існує єдина пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$ таких, що $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $B(x)$ або $R(x)$ — нульовий многочлен. У цій рівності многочлен $Q(x)$ називають неповною часткою, а многочлен $R(x)$ — остачею.

Корінь многочлена

Число α називають коренем многочлена $A(x)$, якщо $A(\alpha) = 0$.

Властивості коренів многочлена

Число α є коренем многочлена $A(x)$ тоді й тільки тоді, коли многочлен $A(x)$ ділиться націло на двочлен $x - \alpha$.

Якщо $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — множина коренів многочлена $A(x)$, то $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q(x)$, де $Q(x)$ — деякий многочлен.

Множина коренів многочлена степеня n містить не більше ніж n елементів.

Якщо множина коренів многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ містить більше ніж n елементів, то $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$, тобто цей многочлен тотожно дорівнює нулю.

Якщо ціле раціональне рівняння із цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то він є дільником вільного члена.

Теорема Безу

Остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює $A(\alpha)$.

Метод математичної індукції

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n .

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин (теорем):

- 1) База індукції. Доводять (перевіряють) справедливості твердження для $n = 1$.
- 2) Індуктивний перехід. Роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, і на підставі цього доводять, що воно є правильним для $n = k + 1$.

§ 2

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ



- 8.** Степенева функція з натуральним показником
- 9.** Степенева функція із цілим показником
- 10.** Означення кореня n -го степеня.
Функція $y = \sqrt[n]{x}$
- 11.** Властивості кореня n -го степеня
- 12.** Степінь з раціональним показником та його властивості
- 13.** Ірраціональні рівняння
- 14.** Різні прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь та їхніх систем
- 15.** Ірраціональні нерівності

- У цьому параграфі ви дізнаєтеся, яку функцію називають степеневою функцією із цілим показником, які властивості має ця функція; що називають коренем n -го степеня, які властивості має корінь n -го степеня; що називають степенем з раціональним показником і які його властивості; які рівняння називають ірраціональними.
- Ви навчитеся добувати корені n -го степеня, виконувати піднесення до степеня з раціональним показником; перетворювати вирази, які містять степені з раціональним показником і корені n -го степеня; розв'язувати ірраціональні рівняння.

8. Степенева функція з натуральним показником

Властивості та графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ добре відомі вам з курсу математики попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником**.

Оскільки вираз x^n , $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x , то **областю визначення степеневі функції з натуральним показником є множина \mathbb{R}** .

Очевидно, що розглядувана функція має єдиний нуль $x = 0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

• Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 8 класу.

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a \geq 0$ існує таке значення аргументу x , що $x^{2k} = a$.

☞ Сказане означає, що **областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина $[0; +\infty)$** .

Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

☞ Отже, **проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число**.

☞ **Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є парною**. Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geq 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

☞ Отже, **функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$** . Аналогічно можна показати, що ця функція **зростає на проміжку $[0; +\infty)$** .

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 8.1). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 8.2.

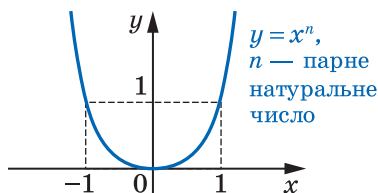


Рис. 8.1

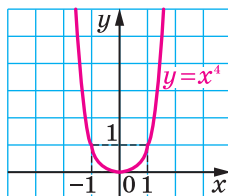


Рис. 8.2

• **Другий випадок: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ або $k = 0$.**

Зазначимо, що при $n = 1$ отримуємо функцію $y = x$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 7 класу.

Тепер нехай $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого a існує таке значення аргументу x , що $x^{2k+1} = a$.

☞ Сказане означає, що областю значень функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є множина \mathbb{R} .

Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

☞ Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число.

☞ Функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є непарною. Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

☞ Отже, функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є зростаючою.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 8.3). Зокрема, графік функції $y = x^5$ зображено на рисунку 8.4.

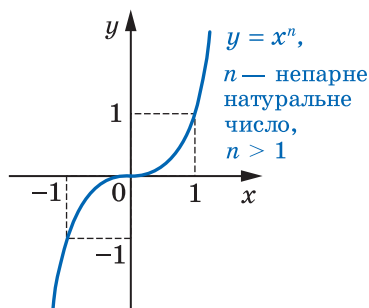


Рис. 8.3

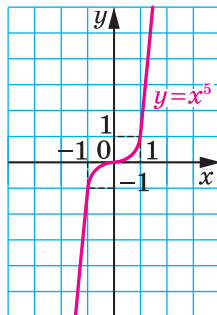


Рис. 8.4

У таблиці наведено властивості функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, установлені в цьому пункті.

Властивість	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Область значень	$[0; +\infty)$	\mathbb{R}
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$	Зростаюча



1. Яку функцію називають степеневою функцією з натуральним показником?
2. Сформулюйте властивості функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.
3. Сформулюйте властивості функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число.

ВПРАВИ

- 8.1.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняйте: 1) $f(-7,6)$ і $f(-8,5)$; 2) $f(-6,9)$ і $f(6,9)$; 3) $f(0,2)$ і $f(-12)$.
- 8.2.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{50}$. Порівняйте: 1) $f(-1,1)$ і $f(-1,2)$; 2) $f(19)$ і $f(-19)$; 3) $f(-7)$ і $f(9)$.
- 8.3.° Чи впливає з нерівності $x_1^n > x_2^n$, що $x_1 > x_2$, якщо: 1) n — парне; 2) n — непарне?
- 8.4.° Чи впливає з нерівності $x_1 > x_2$, що $x_1^n > x_2^n$, якщо: 1) n — парне; 2) n — непарне?

8.5.* Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| x^4$; 2) $y = |x| x^4 + x^5$.

8.6.* Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| x^3$; 2) $y = |x| x^4 - x^5$.

8.7.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку:

1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -2]$; 5) $(-2; 1)$.

8.8.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^6$ на проміжку:

1) $[-13; -1]$; 2) $[-2; 1]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$.

8.9.* Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $f(x) = x^n$, якщо:

1) $f(-4) < f(2)$; 2) $f(-4) > f(2)$; 3) $f(4) > f(-2)$?

8.10.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{11} + x^3 = 2$; 2) $2x^4 + x^{10} = 3$.

8.11.** Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^3 + x^7 = -5$; 2) $x^6 + 3x^8 = 4$.

8.12.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку $[-1; a]$, де $a > -1$.

8.13.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^6$ на проміжку $[a; 2]$, де $a < 2$.

8.14.* Розв'яжіть рівняння $5x^{17} - 3x^8 = 2$.

8.15.* Розв'яжіть рівняння $11x^{15} + 2x^4 = -9$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

8.16. Подайте степінь у вигляді дробу:

1) 3^{-8} ; 3) a^{-9} ; 5) 12^{-1} ; 7) $(a - b)^{-2}$;
2) 5^{-6} ; 4) d^{-3} ; 6) m^{-1} ; 8) $(2x - 3y)^{-4}$.

8.17. Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 4) $9 \cdot 0,1^{-1}$;
2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 5) $0,5^{-2} \cdot 4^{-1}$;
3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

8.18. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-2} + a^{-3}$; 3) $(c^{-1} - d^{-1})(c - d)^{-2}$;
2) $mn^{-4} + m^{-4}n$; 4) $(x^{-2} + y^{-2})(x^2 + y^2)^{-1}$.

9. Степенева функція із цілим показником

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають **степеневою функцією із цілим показником**.

Властивості цієї функції для натурального показника було розглянуто в попередньому пункті. Тут ми розглянемо випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем.

Областю визначення функції $y = x^0$ є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$,

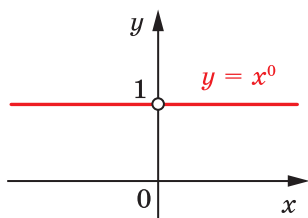


Рис. 9.1

областю значень — одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 9.1.

Розглянемо функцію $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

Окремий випадок цієї функції, коли

$n = 1$, тобто функція $y = \frac{1}{x}$, відомий вам з курсу алгебри 8 класу.

Запишемо функцію $y = x^{-n}$ у вигляді

$$y = \frac{1}{x^n}.$$

Тоді стає зрозуміло, що областю

визначення функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Очевидно, що ця функція нулів не має.

Подальші дослідження властивостей функції $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

• Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Маємо: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\frac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять ні від'ємні числа, ні число 0.

Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу x , що $x^{-2k} = a$.

☞ Сказане означає, що областю значень функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, є множина $(0; +\infty)$.

☞ Очевидно, що проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число.

☞ Функція $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, є парною. Справді, для будь-якого x із області визначення виконуються

$$\text{рівності } (-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}.$$

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивостями числових нерівностей, отримуємо: $0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$.

$$\text{Звідси } \left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k}; \quad \frac{1}{x_1^{2k}} < \frac{1}{x_2^{2k}}; \quad x_1^{-2k} < x_2^{-2k}.$$

Отже, функція $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, зростає на проміжку $(-\infty; 0)$.

Аналогічно можна показати, що функція $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля x значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, стають усе меншими й меншими. Через це відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується зі збільшенням модуля абсциси точки та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Також можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка функції до осі ординат зменшується та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число (рис. 9.2). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^2}$ зображено на рисунку 9.3.

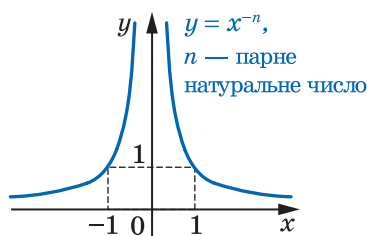


Рис. 9.2

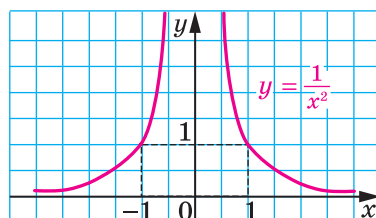


Рис. 9.3

• **Другий випадок:** $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу x , що $x^{-(2k-1)} = a$.

Сказане означає, що областю значень функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число.

Функція $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, є непарною. Справді, для будь-якого x із області визначення виконуються

$$\text{рівності } (-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}.$$

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивостями числових нерівностей, отримуємо:

$$-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}; \left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1};$$

$$-\frac{1}{x_1^{2k-1}} < -\frac{1}{x_2^{2k-1}}; \frac{1}{x_1^{2k-1}} > \frac{1}{x_2^{2k-1}}.$$

Отже, розглядувана функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$. Аналогічно можна показати, що ця функція спадає і на проміжку $(0; +\infty)$.

Отже, функція $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число (рис. 9.4). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^3}$ зображено на рисунку 9.5.

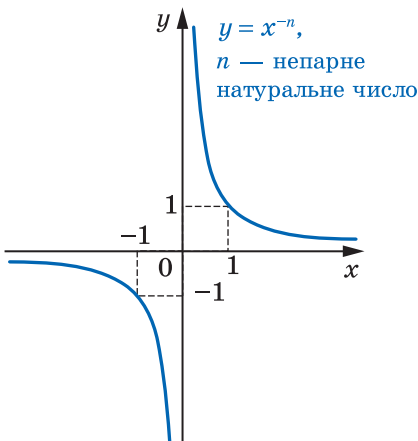


Рис. 9.4

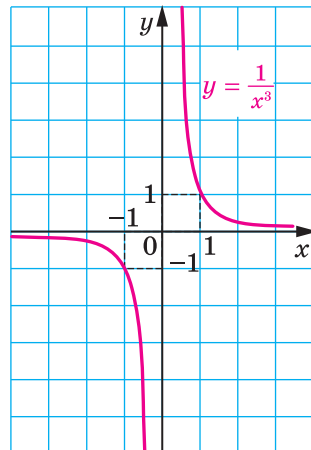


Рис. 9.5

У таблиці наведено властивості функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, вивчені в цьому пункті.

Властивість	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значень	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нулі функції	—	—
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$



1. Яку функцію називають степеневою функцією із цілим показником?
2. Сформулюйте властивості функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число.
3. Сформулюйте властивості функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число.

ВПРАВИ

9.1.° Дано функцію $f(x) = x^{-25}$. Порівняйте:

- 1) $f(18)$ і $f(16)$; 2) $f(-42)$ і $f(2,5)$; 3) $f(-32)$ і $f(-28)$.

9.2.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{-40}$. Порівняйте:

- 1) $f(-1,6)$ і $f(-1,7)$; 3) $f(-8)$ і $f(6)$.
2) $f(24)$ і $f(-24)$;

9.3.° Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = (x^{-1})^{-1}$; 2) $y = ((x - 2)^{-2})^{-2}$.

9.4.° Побудуйте графік функції:

$$1) y = (x - 2)^0; \quad 2) y = (x^2 - 4x + 3)^0; \quad 3) y = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-1}.$$

9.5.° Побудуйте графік рівняння:

$$1) (y + 2)^0 = x - 2; \quad 2) (y - 2)^0 = (x + 1)^0.$$

9.6.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-6}$ на проміжку:

$$1) \left[\frac{1}{2}; 1\right]; \quad 2) \left[-1; -\frac{1}{2}\right]; \quad 3) [1; +\infty); \quad 4) [-1; 0).$$

9.7.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку:

$$1) \left[\frac{1}{3}; 2\right]; \quad 2) [-2; -1]; \quad 3) (-\infty; -3]; \quad 4) (0; 2].$$

9.8.* Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 3. \end{cases}$$

9.9.* Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$$

9.10.* Парним або непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:

$$1) f(-2) < f(1); \quad 2) f(-2) < f(-1); \quad 3) f(2) < f(1)?$$

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

9.11. Знайдіть значення виразу:

$$1) 5\sqrt{4} - \sqrt{25}; \quad 3) (\sqrt{13})^2 - 3 \cdot (\sqrt{8})^2; \\ 2) \frac{1}{3}\sqrt{0,09} - 2; \quad 4) \frac{1}{6} \cdot (\sqrt{18})^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2.$$

9.12. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2 = 25; \quad 2) x^2 = 0,49; \quad 3) x^2 = 3; \quad 4) x^2 = -25.$$

9.13. При яких значеннях x має зміст вираз:

$$1) \sqrt{-x}; \quad 3) \sqrt{-x^2}; \quad 5) \sqrt{x^2 + 8}; \quad 7) \frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}; \\ 2) \sqrt{x^2}; \quad 4) \sqrt{x-8}; \quad 6) \sqrt{(x-8)^2}; \quad 8) \frac{1}{\sqrt{x-3}}?$$

10. Означення кореня n -го степеня.

Функція $y = \sqrt[n]{x}$

Ви знаєте, що коренем другого степеня (квадратним коренем) із числа a називають таке число, другий степінь якого дорівнює a . Аналогічно дають означення кореня n -го степеня із числа a , де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Означення. Коренем n -го степеня із числа a , де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n -й степінь якого дорівнює a .

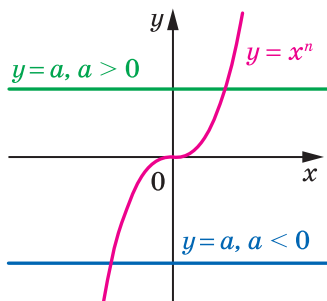
Наприклад, коренем п'ятого степеня із числа 32 є число 2, оскільки $2^5 = 32$; коренем третього степеня із числа -64 є число -4 , оскільки $(-4)^3 = -64$; коренями четвертого степеня із числа 81 є числа 3 і -3 , оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

З означення випливає, що будь-який корінь рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є коренем n -го степеня із числа a і, навпаки, будь-який корінь n -го степеня із числа a є коренем розглядуваного рівняння.

Якщо n — непарне натуральне число, то функція $y = x^n$ є зростаючою і, оскільки її областю значень є множина \mathbb{R} , то рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь при будь-якому a .

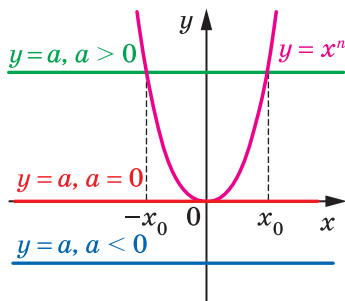
Рисунок 10.1 ілюструє останнє твердження: при будь-якому значенні a графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ мають одну спільну точку. Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то з будь-якого числа існує корінь n -го степеня, причому тільки один.



n — непарне натуральне число,
 $n > 1$

Рис. 10.1



n — парне натуральне число

Рис. 10.2

Корінь непарного степеня n , $n > 1$, із числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь n -го степеня з a »). Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Знак $\sqrt[n]{}$ називають **знаком кореня n -го степеня** або **радикалом**. Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**.

Корінь третього степеня прийнято називати також **кубічним коренем**. Наприклад, запис $\sqrt[3]{2}$ читають: «корінь кубічний із числа 2».

Наголосимо, що вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, існує при будь-якому a .

З означення кореня n -го степеня випливає, що **при будь-якому a виконується рівність**

$$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$$

Наприклад, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0,1}\right)^7 = -0,1$.

Розглянемо рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число.

Оскільки областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина $[0; +\infty)$, то при $a < 0$ дане рівняння не має розв'язків.

Очевидно, що при $a = 0$ рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і набуває всіх додатних значень. Отже, при $a \geq 0$ рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число, на проміжку $[0; +\infty)$ має єдиний корінь.

Оскільки розглядувана функція є парною, то при $a > 0$ дане рівняння має два корені, які є протилежними числами.

Наведені твердження мають просту геометричну інтерпретацію (рис. 10.2). Якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ не мають спільних точок; якщо $a = 0$, то розглядувані графіки мають одну спільну точку; якщо $a > 0$, то спільних точок дві, причому їхні абсциси — протилежні числа.

Тепер можна зробити такий висновок:

якщо n — парне натуральне число, то при $a < 0$ корінь n -го степеня із числа a не існує; при $a = 0$ корінь n -го степеня із числа a дорівнює 0; при $a > 0$ існують два протилежних числа, які є коренями n -го степеня із числа a .

Ви знаєте, що арифметичним квадратним коренем з невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, другий степінь якого дорівнює a . Аналогічно дають означення арифметичного кореня n -го степеня.

Означення. Арифметичним коренем n -го степеня з невід'ємного числа a , де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n -й степінь якого дорівнює a .

Арифметичний корінь n -го степеня з невід'ємного числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$.

Наприклад, $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3 \geq 0$ і $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, оскільки $2 \geq 0$ і $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, оскільки $0 \geq 0$ і $0^{10} = 0$.

Узагалі, якщо $b \geq 0$ і $b^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.

Звернемо увагу на те, що для позначення арифметичного кореня n -го степеня з невід'ємного числа a та кореня непарного степеня n із числа a використовують один і той самий запис: $\sqrt[n]{a}$. Запис $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, використовують тільки для позначення арифметичного кореня. Зауважимо, що корінь парного степеня із числа a не має позначення.

За допомогою знака кореня n -го степеня можна записувати корені рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

✚ Якщо n — непарне натуральне число, то при будь-якому значенні a розглядуване рівняння має єдиний корінь $x = \sqrt[n]{a}$.

✚ Якщо n — парне натуральне число і $a > 0$, то рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt[n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.

✚ Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Наприклад, коренем рівняння $x^3 = 7$ є число $\sqrt[3]{7}$; коренями рівняння $x^4 = 5$ є два числа: $-\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[4]{5}$.

З означення арифметичного кореня n -го степеня випливає, що:

1) $\sqrt[n]{a} \geq 0$, де $a \geq 0$;

2) $(\sqrt[n]{a})^n = a$, де $a \geq 0$.

Наприклад, $\sqrt[6]{7} \geq 0$ і $(\sqrt[6]{7})^6 = 7$.

Покажемо, що при будь-якому a і $k \in \mathbb{N}$

$$(\sqrt[2k+1]{-a}) = -\sqrt[2k+1]{a}$$

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, треба показати, що $y^{2k+1} = x$.

Маємо: $(-\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = -(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = -a$.

Доведена властивість дає змогу корінь непарного степеня з від'ємного числа виразити через арифметичний корінь.

Наприклад, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-12} = -\sqrt[5]{12}$.

Вище було встановлено, що корінь непарного степеня з будь-якого числа існує та набуває єдиного значення. Отже, кожному числу $x \in \mathbb{R}$ можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Тим самим для всіх $k \in \mathbb{N}$ задано функцію $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ з областю визначення \mathbb{R} .

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k+1]{x} = a$ при будь-якому a має корінь $x = a^{2k+1}$, то областю значень функції f є множина \mathbb{R} .

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$,

$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $(\sqrt[2k+1]{x})^{2k+1} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Використовуючи графік функції $y = x^{2k+1}$ і теорему 4.2, можна побудувати графік функції $y = \sqrt[2k+1]{x}$ (рис. 10.3). Зокрема, на рисунку 10.4 зображено графік функції $y = \sqrt[3]{x}$.

Оскільки функція $g(x) = x^{2k+1}$ є зростаючою, то за теоремою 4.3 функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ також є зростаючою.

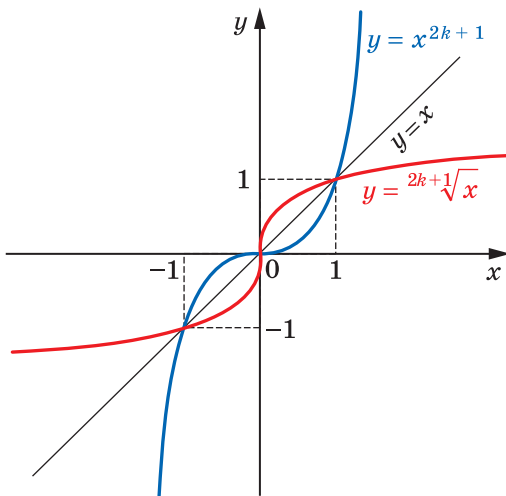


Рис. 10.3

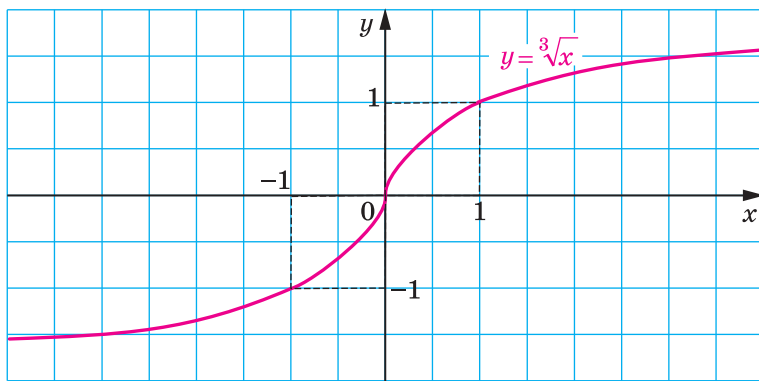


Рис. 10.4

Функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ має єдиний нуль $x = 0$.

Якщо $x < 0$, то $f(x) < 0$; якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції f .

Для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності $f(-x) = \sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x} = -f(x)$. Отже, функція f є непарною.

Аналогічно означають функцію $f(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0; +\infty)$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k]{x} = a$ при будь-якому $a \geq 0$ має корінь $x = a^{2k}$, а при будь-якому $a < 0$ не має коренів, то областю значень функції f є проміжок $[0; +\infty)$.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$,

$E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Для будь-якого $x \in [0; +\infty)$ виконується рівність $(\sqrt[2k]{x})^{2k} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

На рисунку 10.5 показано, як за допомогою графіка функції $y = x^{2k}$, де $x \geq 0$, побудувати графік функції $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$.

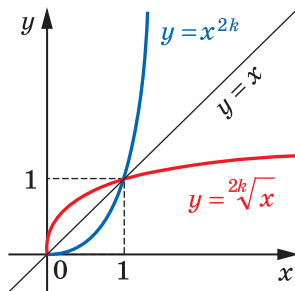


Рис. 10.5

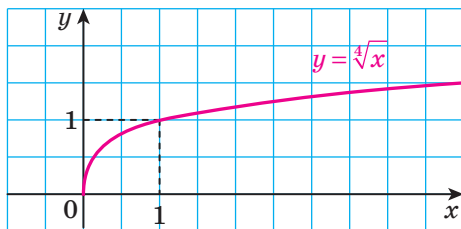


Рис. 10.6

На рисунку 10.6 зображено графік функції $y = \sqrt[4]{x}$.

З'ясуємо деякі властивості функції $f(x) = \sqrt[2k]{x}$.

Оскільки функція $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $D(g) = [0; +\infty)$, є зростаючою, то функція $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ також є зростаючою.

Функція f має єдиний нуль $x = 0$.

Якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжок $(0; +\infty)$ є проміжком знакосталості функції f .

Оскільки область визначення функції f не є симетричною відносно початку координат, то функція f не є ні парною, ні непарною.

У таблиці наведено властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$, вивчені в цьому пункті.

Властивість	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число, $n > 1$
Область визначення	$[0; +\infty)$	\mathbb{R}
Область значень	$[0; +\infty)$	\mathbb{R}
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання / спадання	Зростаюча	Зростаюча

ПРИКЛАД Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt[4]{x-2} < 1$; 3) $\sqrt[6]{x^2-4} > \sqrt[6]{3x}$.

Розв'язання. 1) Дана нерівність рівносильна такій: $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$. Оскільки функція $y = \sqrt[3]{x}$ є зростаючою, то можна зробити висновок, що $x < 8$.

Відповідь: $(-\infty; 8)$.

2) Маємо: $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Оскільки функція $y = \sqrt[4]{t}$ є зростаючою з областю визначення $[0; +\infty)$, то дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x-2 < 1, \\ x-2 \geq 0. \end{cases}$$

Звідси $2 \leq x < 3$.

Відповідь: $[2; 3)$.

3) Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x^2 - 4 > 3x, \\ 3x \geq 0. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x > 4, \\ x \geq 0. \end{cases}$ Звідси отримуємо, що $x > 4$.

Відповідь: $(4; +\infty)$. ◀



1. Що називають коренем n -го степеня із числа a , де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. Що називають арифметичним коренем n -го степеня з невід'ємного числа a , де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
3. Які властивості має функція $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$?
4. Які властивості має функція $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$?

ВПРАВИ

10.1.° Обчисліть:

$$1) (-\sqrt[7]{2})^7; \quad 2) -\sqrt[4]{7^4}; \quad 3) \left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6; \quad 4) \frac{1}{2}\sqrt[6]{48^6}.$$

10.2.° Знайдіть значення виразу:

$$1) (-\sqrt[6]{11})^6; \quad 2) \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3; \quad 3) \frac{1}{3}\sqrt[3]{45^3}; \quad 4) (-2\sqrt[5]{-5})^5.$$

10.3.° Обчисліть:

$$1) 0,3\sqrt[3]{1000} - 5\sqrt[8]{256}; \quad 2) \sqrt[5]{14^5} + (-2\sqrt{10})^2 - \sqrt[7]{-128}.$$

10.4.° Обчисліть:

$$1) 200 \sqrt[3]{0,001} - \sqrt[5]{-0,00032}; \quad 2) \sqrt[3]{8000} \cdot \sqrt[4]{7 \frac{58}{81}} - (-\sqrt[5]{8})^5 + \sqrt[7]{17^7}.$$

10.5.° Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt[3]{x-1}; \quad 2) y = \sqrt[4]{|x|-1}; \quad 3) y = \sqrt[6]{x^2(x-3)}.$$

10.6.° Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt[4]{x-2}; \quad 2) y = \sqrt[6]{x^2-4x+3}; \quad 3) y = \sqrt[10]{|x|(x-6)}.$$

10.7.° Знайдіть область значень функції:

$$1) y = \sqrt[6]{x-2}; \quad 2) y = \sqrt[3]{x-3}; \quad 3) y = |\sqrt[8]{x}-1|.$$

10.8.° Знайдіть область значень функції:

$$1) y = \sqrt[4]{x}-4; \quad 2) y = \sqrt[5]{x}-2; \quad 3) y = |\sqrt[7]{x}+1|.$$

10.9.° Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

$$1) \sqrt[3]{3}; \quad 2) \sqrt[4]{21}; \quad 3) \sqrt[3]{100}; \quad 4) -\sqrt[3]{81}?$$

10.10.° Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

$$1) \sqrt[3]{18}; \quad 2) \sqrt[4]{139}; \quad 3) -\sqrt[3]{212}?$$

10.11.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^5 = 9; \quad 3) x^6 = 5; \quad 5) \sqrt[6]{x} = -2; \\ 2) x^7 = -2; \quad 4) \sqrt[4]{x} = 3; \quad 6) \sqrt[3]{2x} + 7 = 0.$$

10.12.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^9 = 10; \quad 3) x^6 = -64; \quad 5) \sqrt[5]{x} = -2; \\ 2) x^{10} = 9; \quad 4) \sqrt[4]{x} = -2; \quad 6) \sqrt[4]{3x-2} = 2.$$

10.13.° Побудуйте графік функції:

$$1) y = (\sqrt[3]{x})^3; \quad 2) y = (\sqrt[4]{x})^4.$$

10.14.° Знайдіть область визначення виразу:

$$1) \sqrt[4]{\frac{|x|-1}{x^2-9}}; \quad 2) \sqrt[8]{6-|x|} + \frac{1}{\sqrt[4]{3-x}}.$$

10.15.° Знайдіть область визначення виразу:

$$1) \sqrt[6]{\frac{|x|-4}{x^2-36}}; \quad 2) \sqrt[10]{|x|-3} - \frac{1}{\sqrt[4]{x+4}}.$$

10.16.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x^2-4)\sqrt[4]{x+1} = 0; \quad 2) (x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3} = 0.$$

10.17.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) (|x|-3)\sqrt[6]{2-x} = 0; \quad 2) (x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3} = 0.$$

10.18.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = (\sqrt[4]{x-1})^4 + (\sqrt[4]{1-x})^4 + 1; \quad 2) y = (\sqrt[6]{x})^6 + (\sqrt[6]{1-x})^6.$$

10.19.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = x(\sqrt[4]{x})^4; \quad 2) y = (\sqrt[8]{2+x})^8 + (\sqrt[6]{2-x})^6.$$

10.20.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$ на проміжку:

$$1) [-3; -1]; \quad 2) [-1; 2]; \quad 3) [-3; +\infty).$$

10.21.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ на проміжку:

$$1) [2; 3]; \quad 2) [-2; 1]; \quad 3) (-\infty; 2).$$

10.22.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt[3]{3x+1} < 4; \quad 2) \sqrt[8]{4x+1} \leq 1; \quad 3) \sqrt[4]{x^2-8} > \sqrt[4]{2x}.$$

10.23.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt[10]{x+2} > 1; \quad 3) \sqrt[8]{x^2 - |x| + 1} > \sqrt[5]{5 - |x|}.$$

$$2) \sqrt[4]{5x+1} < 3;$$

10.24.** Залежно від значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

$$1) (x-a)\sqrt[4]{x+1} = 0; \quad 3) (x-a)(\sqrt[4]{x}-1) = 0.$$

$$2) (x-a)(\sqrt[4]{x}+1) = 0;$$

10.25.** Залежно від значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

$$1) (x+1)\sqrt[4]{x-a} = 0; \quad 2) (x-1)(\sqrt[4]{x}-a) = 0.$$

10.26.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-26} + \sqrt[3]{x} = 4$.

10.27.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-9} + \sqrt[4]{x+6} = 3$.

10.28.** Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + \sqrt[6]{x} = y + \sqrt[6]{y}, \\ x^2 + xy + y^2 = 27. \end{cases}$$

10.29.** Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + \sqrt[5]{x} = y + \sqrt[5]{y}, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

10.30.* Доведіть, що
$$\underbrace{\sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{\dots + \sqrt[3]{24}}}}}_{100 \text{ радикалів}} < 3.$$

10.31.* Доведіть, що
$$\underbrace{\sqrt[4]{14 + \sqrt[4]{14 + \sqrt[4]{\dots + \sqrt[4]{14}}}}}_{200 \text{ радикалів}} < 2.$$

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

10.32. Знайдіть значення виразу:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}; & 4) \sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}; & 7) \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}; \\
 2) \sqrt{200} \cdot \sqrt{0,18}; & 5) \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}; & 8) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}. \\
 3) \sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}; & 6) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}; &
 \end{array}$$

10.33. При яких значеннях a виконується рівність:

$$1) \sqrt{a^2} = a; \quad 2) \sqrt{a^2} = -a?$$

10.34. Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

$$1) \sqrt{b^2}; \quad 2) -0,4\sqrt{c^2}; \quad 3) \sqrt{a^6}; \quad 4) \sqrt{m^8}.$$

10.35. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sqrt{m^2}, \text{ якщо } m > 0; & 4) \sqrt{0,36k^2}, \text{ якщо } k \leq 0; \\
 2) \sqrt{n^2}, \text{ якщо } n < 0; & 5) \sqrt{c^{12}}; \\
 3) \sqrt{16p^2}, \text{ якщо } p \geq 0; & 6) \sqrt{0,25b^{14}}, \text{ якщо } b \leq 0.
 \end{array}$$

11. Властивості кореня n -го степеня

Розглянемо теореми, які виражають властивості кореня n -го степеня.

Теорема 11.1 (перша теорема про корінь із степеня).

Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{N}$ виконуються рівності:

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$$

Доведення. Щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, достатньо показати, що $y^{2k+1} = x$. Для першої рівності, що доводиться, $x = a^{2k+1}$, а $y = a$. Звідси рівність $y^{2k+1} = x$ є очевидною.

Щоб довести рівність $\sqrt[k]{x} = y$, достатньо показати, що $y \geq 0$ і $y^{2k} = x$. Для другої рівності, що доводиться, маємо: $|a| \geq 0$ і $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ◀

Теорема 11.2 (корінь із добутку). Якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt[n]{x} = y$, де $x \geq 0$, достатньо показати, що $y \geq 0$ і $y^n = x$.

Маємо: $\sqrt[n]{a} \geq 0$ і $\sqrt[n]{b} \geq 0$. Тоді $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$. Крім того, $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$. ◀

Із теореми 11.2 випливає, що коли $a \leq 0$ і $b \leq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$.

Теорема 11.3 (корінь із частки). Якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

Із теореми 11.3 випливає, що коли $a \leq 0$ і $b < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$.

Теорема 11.4 (ступінь кореня). Якщо $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$.

Маємо: $(\sqrt[n]{a})^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множників}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k \text{ множників}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ◀

Теорема 11.5 (корінь із кореня). Якщо $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Доведення. Маємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geq 0$.

Крім того, $(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = \left((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n \right)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a$. ◀

Теорема 11.6 (друга теорема про корінь із степеня). Якщо $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ◀

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз: 1) $\sqrt[12]{a^3}$; 2) $\sqrt[4]{a^{12}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2}$; 4) $\sqrt[6]{x^6 y^6}$, якщо $x \geq 0$ і $y \leq 0$.

Розв'язання. Застосуємо теореми 11.5 і 11.1.

1) З умови випливає, що $a \geq 0$. Тоді $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

2) $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|$.

3) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$.

4) Ураховуючи, що $x \geq 0$ і $y \leq 0$, можна записати:

$$\sqrt[6]{x^6 y^6} = \sqrt[6]{(xy)^6} = |xy| = |x| |y| = x(-y) = -xy. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt[8]{b^{43}}$; 2) $\sqrt[8]{-b^{43}}$; 3) $\sqrt[6]{a^6 b^7}$, якщо $a < 0$.

Розв'язання. 1) З умови випливає, що $b \geq 0$.

Тоді $\sqrt[8]{b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40} b^3} = |b^5| \sqrt[8]{b^3} = b^5 \cdot \sqrt[8]{b^3}$.

2) З умови випливає, що $b \leq 0$.

Тоді $\sqrt[8]{-b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40} (-b)^3} = |b^5| \sqrt[8]{-b^3} = -b^5 \cdot \sqrt[8]{-b^3}$.

3) З умови випливає, що $b \geq 0$.

Тоді $\sqrt[6]{a^6 b^7} = \sqrt[6]{a^6 b^6 b} = |a| |b| \sqrt[6]{b} = -ab \sqrt[6]{b}$. ◀

ПРИКЛАД 3 Внесіть множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$;

2) $a\sqrt[4]{7}$; 3) $c\sqrt[10]{c^7}$; 4) $3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}$.

Розв'язання. 1) $-2\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{192}$.

2) Якщо $a \geq 0$, то $a\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7a^4}$; якщо $a < 0$, то $a\sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{7a^4}$.

3) З умови випливає, що $c \geq 0$. Тоді $c\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}} \cdot \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}$.

4) З умови випливає, що $b \leq 0$. Тоді

$$3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4} \cdot \sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4} \cdot \left(-\frac{b}{3}\right) = -\sqrt[4]{-27b^5}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 4 Скоротіть дріб $\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}$.

Розв'язання. Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{(\sqrt[6]{b})^2-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{(\sqrt[6]{b}-1)(\sqrt[6]{b}+1)}{\sqrt[6]{b}+1} = \sqrt[6]{b}-1. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 5 Скоротіть дріб $\frac{\sqrt[10]{ab} + \sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}$.

Розв'язання. З умови випливає, що числа a і b однакового знака. Розглянемо два випадки.

Перший випадок: $a > 0$ і $b > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab} + \sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}} = \frac{\sqrt[10]{a} \cdot \sqrt[10]{b} + \sqrt[10]{b} \cdot \sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a} \cdot \sqrt[10]{b}} = \frac{\sqrt[10]{b}(\sqrt[10]{a} + \sqrt[10]{b})}{\sqrt[10]{a} \cdot \sqrt[10]{b}} = \frac{\sqrt[10]{a} + \sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}}.$$

Другий випадок: $a < 0$, $b < 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab} + \sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}} = \frac{\sqrt[10]{-a} \cdot \sqrt[10]{-b} - (\sqrt[10]{-b})^2}{\sqrt[10]{-a} \cdot \sqrt[10]{-b}} = \frac{\sqrt[10]{-b}(\sqrt[10]{-a} - \sqrt[10]{-b})}{\sqrt[10]{-a} \cdot \sqrt[10]{-b}} = \frac{\sqrt[10]{-a} - \sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = x$. Скористаємося тим, що $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

Маємо:

$$x^3 = 9 + \sqrt{80} + 9 - \sqrt{80} + 3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} \cdot (\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}).$$

$$\text{Звідси } x^3 = 18 + 3x; \quad x^3 - 3x - 18 = 0.$$

Розглянувши дільники числа 18, нескладно установити, що $x = 3$ є коренем даного рівняння. Поділивши многочлен $x^3 - 3x - 18$ на двочлен $x - 3$, отримуємо $x^2 + 3x + 6$.

$$\text{Маємо: } (x - 3)(x^2 + 3x + 6) = 0.$$

Це рівняння має єдиний корінь $x = 3$. ◀



1. Сформулюйте першу теорему про корінь із степеня.
2. Сформулюйте другу теорему про корінь із степеня.
3. Сформулюйте теорему про корінь із добутку.
4. Сформулюйте теорему про корінь із частки.
5. Сформулюйте теорему про степінь кореня.
6. Сформулюйте теорему про корінь із кореня.

ВПРАВИ

11.1.° Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}; \quad 2) \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}; \quad 3) \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}.$$

11.2.° Чому дорівнює значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}; \quad 2) \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}; \quad 3) \sqrt[5]{2\sqrt{17}+10} \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}?$$

11.3.° Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt[4]{162}; \quad 2) \sqrt[3]{250}; \quad 3) \sqrt[3]{-a^7}; \quad 4) \sqrt[3]{-54a^5b^9}.$$

11.4.° Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt[4]{80}; \quad 2) \sqrt[3]{432}; \quad 3) \sqrt[3]{54y^8}; \quad 4) \sqrt[4]{243b^9c^{18}}.$$

11.5.° Внесіть множник під знак кореня:

$$1) 4\sqrt[3]{5}; \quad 2) -10\sqrt[4]{0,271}; \quad 3) 5\sqrt[3]{0,04x}; \quad 4) b\sqrt[5]{3b^3}.$$

11.6.° Внесіть множник під знак кореня:

$$1) 0,25\sqrt[3]{320}; \quad 2) 2\sqrt[4]{7}; \quad 3) 5\sqrt[4]{4a}; \quad 4) 2x^3\sqrt[5]{0,25x^3}.$$

11.7.° Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}; \quad 2) \sqrt[5]{b\sqrt[6]{b}}; \quad 3) \sqrt[8]{x^3\sqrt[3]{x^7}}; \quad 4) \sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}.$$

11.8.° Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[3]{3\sqrt{3}}; \quad 2) \sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}; \quad 3) \sqrt[5]{x^2\sqrt[6]{x^{13}}}; \quad 4) \sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}.$$

11.9.° Спростіть вираз:

$$1) (1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})(1 - \sqrt[3]{a}); \quad 2) (1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt[4]{a})(1 - \sqrt[4]{a}).$$

11.10.° Спростіть вираз $(\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})(\sqrt[8]{m} + \sqrt[8]{n})(\sqrt[8]{m} - \sqrt[8]{n})$.

11.11.° Скоротіть дріб:

$$1) \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}; \quad 3) \frac{\sqrt[8]{ab^2} - \sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}; \quad 5) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b}};$$

$$2) \frac{\sqrt[6]{x} - 9}{\sqrt[12]{x} + 3}; \quad 4) \frac{\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16}{x - 64}; \quad 6) \frac{2 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}.$$

11.12.° Скоротіть дріб:

$$1) \frac{\sqrt[6]{a} + 1}{\sqrt[3]{a} - 1}; \quad 3) \frac{a - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}; \quad 5) \frac{\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{a^2b}};$$

$$2) \frac{\sqrt{m} - \sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn} - \sqrt{n}}; \quad 4) \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}; \quad 6) \frac{3 + \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}.$$

11.13.° При яких значеннях a виконується рівність:

$$1) \sqrt[3]{(a-5)^4} = (\sqrt[3]{a-5})^4; \quad 3) \sqrt[6]{a(a-1)} = \sqrt[6]{a} \sqrt[6]{(1-a)};$$

$$2) \sqrt[4]{(a-2)^4} = (\sqrt[4]{a-2})^4; \quad 4) \sqrt[12]{a-2} \sqrt[12]{3-a} = \sqrt[12]{(2-a)(a-3)}?$$

11.14.° При яких значеннях a виконується рівність:

$$1) \sqrt[6]{a^{30}} = a^5; \quad 2) \sqrt[6]{a^{30}} = -a^5; \quad 3) \sqrt[4]{a^4} = (\sqrt[4]{a})^4; \quad 4) \sqrt[4]{a^4} = (\sqrt[4]{-a})^4?$$

11.15.° При яких значеннях a і b виконується рівність:

$$1) \sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{-a} \cdot \sqrt[4]{-b}; \quad 2) \sqrt[4]{-ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-b}; \quad 3) \sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{-a} \cdot \sqrt[5]{-b}?$$

11.16.° При яких значеннях x виконується рівність:

$$1) \sqrt[4]{x^2 - 4} = \sqrt[4]{x-2} \cdot \sqrt[4]{x+2};$$

$$2) \sqrt[8]{(x-3)(7-x)} = \sqrt[8]{x-3} \cdot \sqrt[8]{7-x}?$$

11.17.° Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[8]{256k^8}, \text{ якщо } k \leq 0; \quad 3) \sqrt[4]{81x^8y^4}, \text{ якщо } y \geq 0;$$

$$2) \sqrt[6]{c^{24}}; \quad 4) -1,2x \sqrt[6]{64x^{30}}, \text{ якщо } x \leq 0.$$

11.18.° Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[4]{625a^{24}}; \quad 3) \sqrt[10]{p^{30}q^{40}}, \text{ якщо } p \geq 0;$$

$$2) \sqrt[4]{0,0001b^{20}}, \text{ якщо } b \geq 0; \quad 4) \sqrt[12]{m^{36}n^{60}}, \text{ якщо } m \leq 0, n \leq 0.$$

11.19.° Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt[4]{-m^9}; \quad 3) \sqrt[4]{a^8b^{13}}, \text{ якщо } a > 0; \quad 5) \sqrt[4]{a^{15}b^{15}};$$

$$2) \sqrt[4]{32m^{18}n^{17}}; \quad 4) \sqrt[6]{x^6y^7}, \text{ якщо } x \neq 0; \quad 6) \sqrt[8]{-a^{25}b^{50}}.$$

11.20.* Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt[4]{32a^6}$, якщо $a \leq 0$; 3) $\sqrt[6]{a^7b^7}$, якщо $a < 0, b < 0$;
 2) $\sqrt[4]{-625a^5}$; 4) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}$, якщо $a > 0$.

11.21.* Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $a\sqrt[4]{2}$, якщо $a \geq 0$; 4) $ab\sqrt[4]{ab^2}$, якщо $b \leq 0$;
 2) $mn\sqrt[4]{\frac{1}{m^3n^3}}$; 5) $b\sqrt[6]{6}$;
 3) $ab\sqrt[6]{\frac{6}{a^3b^2}}$, якщо $a > 0, b < 0$; 6) $a\sqrt[6]{-a}$.

11.22.* Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $c\sqrt[8]{3}$, якщо $c \leq 0$; 3) $ab\sqrt[3]{\frac{3}{a^4b^5}}$, якщо $a < 0$;
 2) $a\sqrt[6]{a}$; 4) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

11.23.* Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \cdot \sqrt[6]{19 + 6\sqrt{10}}$; 2) $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6 - 4\sqrt{2}}$.

11.24.* Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt[6]{7 - 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2\sqrt{6} - 1} \cdot \sqrt[4]{25 + 4\sqrt{6}}$.

11.25.* Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 2x + \sqrt[6]{x^6}$; 2) $y = \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^2}$; 3) $y = \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^9}$.

11.26.* Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt[8]{x^8} - 2x$; 2) $y = \sqrt[4]{-x} \cdot \sqrt[4]{-x^3}$; 3) $y = \frac{\sqrt[6]{x^6}}{x}$.

11.27.* Спростіть вираз:

- 1) $\left(\frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[6]{x} - 1} - \frac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x} - 1}$;
 2) $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}} + 1 \right)$;
 3) $\frac{\sqrt[3]{2a + 2\sqrt{a^2 - 1}}}{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} + 2}}$.

11.28.* Доведіть тотожність:

$$1) \left(\frac{1}{\sqrt[6]{x+1}} - \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x}} \right) : \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x+2}\sqrt[6]{x+1}} = \frac{\sqrt[6]{x+1}}{x};$$

$$2) \frac{\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2-\sqrt[3]{b^2}}} + \frac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b};$$

$$3) \frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}} \cdot \frac{m-4\sqrt{m-4}}{m-8} = 1.$$

11.29.** Доведіть, що значення виразу є раціональним числом:

$$1) \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}; \quad 2) \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}.$$

11.30.** Доведіть, що $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$.

11.31.** Доведіть, що значення виразу є цілим числом:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{999^2} + \sqrt[3]{999 \cdot 1000} + \sqrt[3]{1000^2}}.$$

11.32.** Спростіть вираз $(\sqrt[32]{2}+1)(\sqrt[16]{2}+1)(\sqrt[8]{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)$.

11.33.** Спростіть вираз $(\sqrt[64]{a}+1)(\sqrt[32]{a}+1) \cdot \dots \cdot (\sqrt{a}+1)$.

11.34.* Доведіть рівність

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + \sqrt{6}}}}}}_{10 \text{ радикалів}} = {}^{1024}\sqrt{2 + \sqrt{3}} + {}^{1024}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

11.35. З натуральних чисел від 11 до 40 включно навмання називають одне. Яка ймовірність того, що це число: 1) кратне 7; 2) є дільником числа 40; 3) є простим?

11.36. У коробці лежать білі та чорні кульки. Скільки білих кульок у коробці, якщо ймовірність вийняти з неї навмання білу кульку дорівнює $\frac{2}{7}$, а чорних кульок у коробці 25?

12. Степінь з раціональним показником та його властивості

Нагадаємо означення степеня з натуральним показником:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1;$$

$$a^1 = a.$$

Ви знаєте, що степінь з натуральним показником має такі властивості:

- 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;
- 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
- 4) $(ab)^n = a^n b^n$;
- 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Пізніше ви ознайомилися з означеннями степеня з нульовим показником і степеня із цілим від'ємним показником:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ці означення дуже вдалі: при такому підході всі п'ять властивостей степеня з натуральним показником залишилися справедливими й для степеня із цілим показником.

Введемо поняття степеня з дробовим показником, тобто степеня a^r , показник якого є раціональним числом виду $r = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Бажано зробити це так, щоб степеню з дробовим показником залишилися притаманними всі властивості степеня із цілим показником. Підказкою для потрібного означення може слугувати такий приклад.

Позначимо через x шукане значення степеня $2^{\frac{2}{3}}$, тобто $x = 2^{\frac{2}{3}}$.

Ураховуючи властивість $(a^m)^n = a^{mn}$, можна записати $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Отже, x — це кубічний корінь із числа 2^2 , тобто $x = \sqrt[3]{2^2}$. Таким чином, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Ці міркування підказують, що доцільно прийняти таке означення.

Означення. Степенем додатного числа a з раціональним показником r , поданим у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

$n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Наприклад, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0,4^{0,3} = 0,4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0,4^3}$.

Зауважимо, що значення степеня a^r , де r — раціональне число, не залежить від того, у вигляді якого дробу подано число r . Це можна показати, використовуючи рівності $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь з основою, яка дорівнює нулю, означають тільки для додатного раціонального показника.

Означення. $0^{\frac{m}{n}} = 0$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Звертаємо увагу, що, наприклад, запис $0^{\frac{1}{2}}$ не має змісту.

Наголосимо, що в означеннях не йдеться про степінь $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, наприклад, вираз $(-2)^{\frac{1}{3}}$ залишився невизначеним. Разом з тим вираз $\sqrt[3]{-2}$ має зміст. Виникає природне запитання: чому б не вважати, що $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажемо, що така домовленість призвела б до суперечності:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Отримали, що від'ємне число $\sqrt[3]{-2}$ дорівнює додатному числу $\sqrt[6]{4}$.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають степеневою функцією з раціональним показником.

Якщо нескоротний дріб $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є додатним числом, то область визначення функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ є проміжок $[0; +\infty)$; а якщо цей дріб — від'ємне число, то проміжок $(0; +\infty)$.

Функція $y = x^{\frac{1}{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, нічим не відрізняється від функції $y = \sqrt[2k]{x}$. Функції $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$ і $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, мають різні області визначення. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ обидві ці функції збігаються, але на проміжку $(-\infty; 0)$ визначена лише функція $y = \sqrt[2k+1]{x}$.

На рисунку 12.1 зображено графіки функцій $y = x^2$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

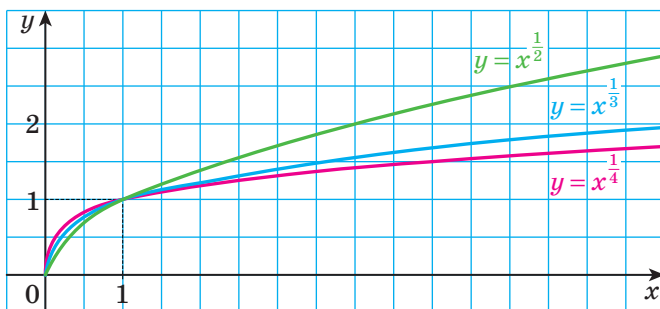


Рис. 12.1

Покажемо, що властивості степеня із цілим показником залишаються справедливими й для степеня з довільним раціональним показником.

Теорема 12.1 (добуток степенів). Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

Доведення. Запишемо раціональні числа p і q у вигляді дробів з однаковими знаменниками: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$n > 1. \text{ Маємо: } a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \\ = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{n}} = a^{p+q}. \blacktriangleleft$$

Наслідок. Для будь-якого $a > 0$ і будь-якого раціонального числа p виконується рівність

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 12.1, запишемо:
 $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Звідси $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. ◀

Теорема 12.2 (частка степенів). Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 12.1, запишемо:
 $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$. Звідси $a^{p-q} = a^p : a^q$. ◀

Теорема 12.3 (ступінь степеня). Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Доведення. Нехай $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, і $q = \frac{s}{k}$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Маємо: $(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{k}} = a^{pq}$. ◀

Теорема 12.4 (ступінь добутку та ступінь частки). Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності:

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції

$$f(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$$

Розв'язання. Областю визначення функції f є множина $(0; +\infty)$. Дану функцію можна задати такими умовами: $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$. Графік функції зображено на рисунку 12.2. ◀

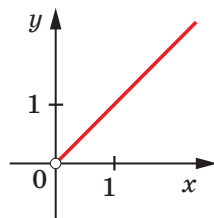


Рис. 12.2

Розглянемо приклади, у яких виконуються тотожні перетворення виразів, що містять степені з раціональним показником.

ПРИКЛАД 2 Скоротіть дріб: 1) $\frac{b^{\frac{5}{2}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}} - 9c^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{32^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}$.

Розв'язання. 1) Розклавши чисельник і знаменник дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b^{\frac{5}{2}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}} - 9c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^{\frac{1}{2}} \left(b^{\frac{1}{3}} + 3c^{\frac{1}{4}} \right)}{\left(b^{\frac{1}{3}} - 3c^{\frac{1}{4}} \right) \left(b^{\frac{1}{3}} + 3c^{\frac{1}{4}} \right)} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} - 3c^{\frac{1}{4}}}.$$

$$2) \text{ Маємо: } \frac{32^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{16^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} - 1 \right)}{2^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} - 1 \right)} = \frac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{16}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2. \quad \blacktriangleleft$$

?

1. Що називають степенем додатного числа a з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. Що називають степенем числа 0 з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$?
3. Сформулюйте теореми про властивості степеня з раціональним показником.
4. Яку функцію називають степеневою функцією з раціональним показником?

ВПРАВИ

12.1.° Знайдіть значення виразу:

$$1) 4^{\frac{1}{2}}; \quad 2) 0,216^{-\frac{1}{3}}; \quad 3) 27^{\frac{4}{3}}; \quad 4) 32^{-0,2}.$$

12.2.° Чому дорівнює значення виразу:

$$1) 8^{\frac{1}{3}}; \quad 2) 10\,000^{\frac{1}{4}}; \quad 3) \left(\frac{1}{4} \right)^{-\frac{3}{2}}; \quad 4) 0,125^{-\frac{2}{3}}?$$

12.3.° Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = x^{\frac{5}{6}}; \quad 2) y = (x - 3)^{2,6}; \quad 3) y = (x^2 - 6x - 7)^{-\frac{1}{9}}.$$

12.4.° Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = x^{\frac{2}{3}}; \quad 2) y = (x + 1)^{-\frac{7}{12}}; \quad 3) y = (x^2 - x - 30)^{\frac{4}{15}}.$$

12.5.° Знайдіть значення виразу:

$$1) \left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}; \quad 2) 8^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}; \quad 3) 36^{0,4} \cdot 6^{1,2}; \quad 4) \left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,6} \cdot 16^{0,6}.$$

12.6.° Чому дорівнює значення виразу:

$$1) 5^{3,4} \cdot 5^{-1,8} \cdot 5^{-2,6}; \quad 2) (7^{-0,7})^8 : 7^{-7,6}; \quad 3) \left(9^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{4}{3}}; \quad 4) \left(2\frac{6}{7}\right)^{2,5} \cdot 1,4^{2,5}?$$

12.7.° Відомо, що a — додатне число. Подайте a у вигляді: 1) куба; 2) восьмого степеня.

12.8.° Відомо, що b — додатне число. Подайте у вигляді куба вираз:

$$1) b^{\frac{1}{2}}; \quad 2) b^{\frac{1}{3}}; \quad 3) b^{-1,8}; \quad 4) b^{\frac{7}{11}}.$$

12.9.° Розкрийте дужки:

$$\begin{aligned} 1) (a^{0,5} - 3b^{0,3})(2a^{0,5} + b^{0,3}); & \quad 4) \left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}} + a\right); \\ 2) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2; & \quad 5) \left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right); \\ 3) (b^{0,4} + 3)^2 - 6b^{0,4}; & \quad 6) \left(x^{\frac{2}{9}} - 1\right)\left(x^{\frac{4}{9}} + x^{\frac{2}{9}} + 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + 1\right). \end{aligned}$$

12.10.° Розкрийте дужки:

$$\begin{aligned} 1) \left(a^{\frac{1}{3}} - 5b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + 5b^{-\frac{1}{4}}\right); & \quad 3) \left(x^{\frac{1}{6}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 4\right); \\ 2) \left(b^{\frac{4}{3}} - b^{-\frac{2}{3}}\right)^2; & \quad 4) \left(a^{\frac{1}{8}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(a^{\frac{1}{8}} + 1\right). \end{aligned}$$

12.11.° Скоротіть дріб:

$$\begin{aligned} 1) \frac{a-4b}{a^{0,5}+2b^{0,5}}; & \quad 3) \frac{4c^{\frac{2}{3}}-12c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+9d^{\frac{2}{3}}}{2c^{\frac{1}{3}}-3d^{\frac{1}{3}}}; & \quad 5) \frac{a^{\frac{3}{4}}+7a^{\frac{1}{2}}}{a-49a^{\frac{1}{2}}}; \\ 2) \frac{a-b}{\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{a^2b}}; & \quad 4) \frac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{\frac{m^2-n^2}{3}}; & \quad 6) \frac{30^{\frac{1}{5}}-6^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}}-2^{\frac{1}{5}}}. \end{aligned}$$

12.12.° Скоротіть дріб:

$$\begin{aligned} 1) \frac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}; & \quad 3) \frac{x^{3,5}y^{2,5}-x^{2,5}y^{3,5}}{x+2x^{0,5}y^{0,5}+y}; & \quad 5) \frac{m^{\frac{7}{6}}-36m^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{1}{2}}-6m^{\frac{1}{3}}}; \\ 2) \frac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}; & \quad 4) \frac{a-125}{\frac{a}{2}-25}; & \quad 6) \frac{24^4-8^4}{6^4-2^4}. \end{aligned}$$

12.13. При яких значеннях a виконується рівність:

$$1) \left((a-2)^{\frac{1}{3}} \right)^3 = a-2; \quad 2) \left((a-2)^{-\frac{1}{3}} \right)^{-3} = a-2?$$

12.14. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \left(x^{\frac{1}{3}} \right)^3; \quad 2) y = \left((x-2)^{\frac{1}{4}} \right)^4; \quad 3) y = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{6}}.$$

12.15. Обчисліть значення виразу:

$$1) \left(\frac{1}{16} \right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{8} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0,81)^{-0,5}; \quad 3) \frac{5^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{12}{12}}}{9^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{8^4}{5^2 \cdot 9^{\frac{1}{3}}};$$

$$2) 16^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{\frac{5}{6}} \cdot 4^{1,5}; \quad 4) \left(72^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{4}{3}} : 36^{\frac{1}{6}}.$$

12.16. Знайдіть значення виразу:

$$1) \left(343^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{49} \right)^{\frac{3}{8}} \right)^{\frac{4}{3}}; \quad 3) \frac{32^{0,24} \cdot 4^{0,7}}{64^{0,6} \cdot 16^{0,25}};$$

$$2) 10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}; \quad 4) \frac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{6}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}}.$$

12.17. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^{-\frac{2}{3}} = 0,04; \quad 2) (x-2)^{\frac{5}{2}} = 32; \quad 3) (x^2 - 2x)^{-\frac{1}{4}} = -1.$$

12.18. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^{-1,5} = 27; \quad 2) (x-1)^{-\frac{2}{5}} = 100; \quad 3) (x-5)^{\frac{3}{7}} = 0.$$

12.19. Доведіть тотожність:

$$1) \left(\frac{a^{0,5} + 2}{a + 2a^{0,5} + 1} - \frac{a^{0,5} - 2}{a - 1} \right) : \frac{a^{0,5}}{a^{0,5} + 1} = \frac{2}{a - 1};$$

$$2) \frac{(a-b)^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 - b^2}{\left(\frac{1}{a^2} + b^2 \right) \left(a + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b \right)} = 2a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}.$$

12.20. Доведіть тотожність:

$$1) \left(\frac{m^2 + n^2}{m^{\frac{3}{2}} + mn^{\frac{1}{2}}} - \frac{m+n}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \frac{m}{n} = n^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{1}{2}};$$

$$2) \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-1} - b^{-1}} - \frac{1}{a^{-\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}}} \right) : \frac{a^{-\frac{2}{3}} + b^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}.$$

12.21.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{a^{\frac{7}{3}} - 2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}} + ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}} - ab^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b} : a^{\frac{1}{3}}; \quad 2) \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{xy} + 4y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^4} - 8y\sqrt[3]{x}\right) : \sqrt[3]{xy}} \cdot \left(2 - \sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right).$$

12.22.* Спростіть вираз $\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}}.$

12.23.* Обчисліть добуток $x^{1,2} \cdot x^{1,3} \cdot x^{1,4} \cdot x^{1,5} \cdot \dots \cdot x^{8,8}$, якщо $x = \sqrt[5]{2}$.

12.24.* Обчисліть добуток $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot \dots \cdot x^{\frac{1}{64}}$, якщо $x = 2^{\frac{64}{9}}$.

12.25.** Спростіть вираз $(a^{0,125} + b^{0,75})(a^{0,25} + b^{1,5})(a^{0,5} + b^3)(a + b^6)$.

12.26.** Спростіть вираз $a^{0,2} + a^{0,5} + a^{0,8} + a^{1,1} + \dots + a^{7,1}$.

12.27.** Спростіть вираз $b^{12,7} - b^{12,6} + b^{12,5} - b^{12,4} + \dots + b^{3,3}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

12.28. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2 - 6}{x - 3} = \frac{x}{x - 3}; \quad 2) \frac{3x - 1}{x} - \frac{4}{x - 2} = \frac{10 - 9x}{x^2 - 2x}.$$

13. Ірраціональні рівняння

Нагадаємо основні відомості про рівносильність рівнянь.

Означення. Областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ називають множину $D(f) \cap D(g)$.

Кожний корінь рівняння належить його області визначення. Цей факт ілюструє діаграма Ейлера (рис. 13.1).

Означення. Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають **рівносильними**, якщо множини їхніх коренів рівні.

Якщо будь-який корінь рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, що належить множині M , є коренем рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, а будь-який корінь рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, що належить множині M , є коренем



Рис. 13.1

рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то такі два рівняння називають **рівносильними на множині M** .

Наприклад, рівняння $x^2 - 1 = 0$ і $x + 1 = 0$ рівносильні на множині $(-\infty; 0)$.

Теорема 13.1. *Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.*

Теорема 13.2. *Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.*

Означення. Якщо множина розв'язків першого рівняння є підмножиною множини розв'язків другого рівняння, то друге рівняння називають **наслідком** першого рівняння.

На рисунку 13.2 означення рівняння-наслідку проілюстровано за допомогою діаграми Ейлера.

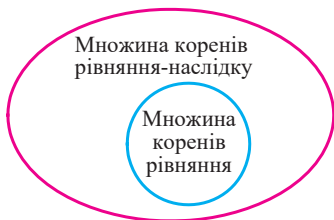


Рис. 13.2

Зазначимо, що коли два рівняння є рівносильними, то кожне з них є наслідком другого.

Ті корені рівняння-наслідку, які не є коренями даного рівняння, називають **сторонніми коренями** даного рівняння.

Якщо під час розв'язування рівняння рівносильність було порушено й відбувся перехід до рівняння-наслідку, то отримані при цьому сторонні корені,

як правило, можна виявити за допомогою перевірки.

Розглянемо функцію $y = x^3$. Вона є зростаючою, а отже, оборотною. Через це функція $y = x^3$ кожного свого значення набуває тільки один раз. Іншими словами, з рівності $x_1^3 = x_2^3$ випливає, що $x_1 = x_2$. Оскільки з рівності $x_1 = x_2$ випливає, що $x_1^3 = x_2^3$, то можна стверджувати таке: *якщо обидві частини рівняння піднести до куба, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.*

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[7]{x^2 - 2} = \sqrt[7]{x}$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до сьомого степеня. Отримаємо рівносильне рівняння:

$$\left(\sqrt[7]{x^2 - 2}\right)^7 = \left(\sqrt[7]{x}\right)^7.$$

Звідси

$$\begin{aligned}x^2 - 2 &= x; \\x^2 - x - 2 &= 0; \\x_1 &= -1, x_2 = 2.\end{aligned}$$

Відповідь: $-1; 2$. ◀

Рівняння, розглянуте в прикладі 1, містить змінну під знаком кореня. Такі рівняння називають **ірраціональними**.

Ось ще приклади ірраціональних рівнянь:

$$\sqrt{x-3} = 2; \quad \sqrt{x-2} \sqrt[4]{x+1} = 0; \quad \sqrt{3-x} = \sqrt[3]{2+x}.$$

Оскільки функція $y = x^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, є оборотною, то міркування, використані під час розв'язування прикладу 1, можна узагальнити у вигляді такої теореми.

Теорема 13.3. *Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.*

Доведення. Покажемо, що рівняння

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

і

$$(f(x))^{2k-1} = (g(x))^{2k-1}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

є рівносильними.

Нехай число α — корінь рівняння (1). Тоді маємо правильну числову рівність $f(\alpha) = g(\alpha)$. Звідси можна записати:

$$(f(\alpha))^{2k-1} = (g(\alpha))^{2k-1}.$$

Це означає, що число α є коренем рівняння (2).

Нехай число β — корінь рівняння (2). Тоді отримуємо, що $(f(\beta))^{2k-1} = (g(\beta))^{2k-1}$. Оскільки функція $y = x^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, є оборотною, то $f(\beta) = g(\beta)$. Отже, число β — корінь рівняння (1).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і, навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Це означає, що рівняння (1) і (2) рівносильні. ◀

Розв'язуючи приклад 1, ми спростили вирази виду $(\sqrt[n]{f(x)})^n$, де n — непарне натуральне число. Розглянемо випадок, коли n — парне натуральне число.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$. (3)

Розв'язання. Природно замінити це рівняння таким:

$$3x + 4 = x - 2. \tag{4}$$

Звідси $x = -3$.

Але перевірка показує, що число -3 не є коренем початкового рівняння. Отже, рівняння (3) не має коренів. Причина появи

стороннього кореня полягає в тому, що застосування формули $(\sqrt{a})^2 = a$ призводить до розширення області визначення рівняння. Таким чином, рівняння (4) є наслідком рівняння (3).

Ще однією причиною появи сторонніх коренів під час розв'язування ірраціональних рівнянь є необоротність функції $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. Це означає, що з рівності $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ не обов'язково випливає, що $x_1 = x_2$. Наприклад, $(-2)^4 = 2^4$, але $-2 \neq 2$. Водночас із рівності $x_1 = x_2$ випливає рівність $x_1^{2k} = x_2^{2k}$.

Наведені міркування підказують, що справедливою є така теорема.

Теорема 13.4. *При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримуємо рівняння, яке є наслідком даного.*

Скориставшись ідеєю доведення теореми 13.3, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4+3x} = x$.

Розв'язання. Підносячи обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо рівняння, яке є наслідком даного:

$$4 + 3x = x^2;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = 4.$$

Перевірка показує, що число -1 є стороннім коренем, а число 4 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 4. ◀

Коли йдеться про перевірку як етап розв'язування рівняння, неможливо уникнути проблеми її технічної реалізації. Наприклад,

число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ є коренем рівняння $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$. Про-

те щоб у цьому переконатися, потрібно виконати значну обчислювальну роботу.

Для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування — метод рівносильних перетворень.

Теорема 13.5. *Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ рівносильне системі*

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 13.3, доведіть цю теорему самостійно.

Зауваження. Рівняння $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ також рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) \geq 0$ або $g(x) \geq 0$, розв'язати легше.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x - 1}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - 3x = x - 1, \\ x \geq 1. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}, \\ x = 2 - \sqrt{3}, \\ x \geq 1; \end{cases} \quad x = 2 + \sqrt{3}.$

Відповідь: $2 + \sqrt{3}$. ◀

Теорема 13.6. Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 13.3, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+7} = x-3$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x+7 = (x-3)^2, \\ x-3 \geq 0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{41}}{2}, \\ x = \frac{7 - \sqrt{41}}{2}, \\ x \geq 3; \end{cases} \quad x = \frac{7 + \sqrt{41}}{2}.$

Відповідь: $\frac{7 + \sqrt{41}}{2}$. ◀

Теореми 13.5 і 13.6 можна узагальнити, керуючись таким твердженням: якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то з рівності $a^{2k} = b^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, випливає, що $a = b$.

Теорема 13.7. Якщо для будь-якого $x \in M$ виконуються нерівності $f(x) \geq 0$ і $g(x) \geq 0$, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні на множині M .

Скориставшись ідеєю доведення теореми 13.3, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-3} + \sqrt{6x+1} = 4$.

Розв'язання. Областю визначення цього рівняння є множина $M = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. На цій множині обидві частини даного рівняння набувають невід'ємних значень, тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню

$$(\sqrt{2x-3} + \sqrt{6x+1})^2 = 4^2.$$

Звідси

$$2x - 3 + 2\sqrt{2x-3}\sqrt{6x+1} + 6x + 1 = 16; \quad \sqrt{2x-3}\sqrt{6x+1} = 9 - 4x.$$

Ліва частина останнього рівняння на множині $M = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ набуває невід'ємних значень. Тоді права частина, тобто $9 - 4x$, має також бути невід'ємною. Звідси $9 - 4x \geq 0$; $x \leq \frac{9}{4}$. Тому на множині

$M_1 = \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right]$ обидві частини рівняння $\sqrt{2x-3}\sqrt{6x+1} = 9 - 4x$ набувають невід'ємних значень. Отже, за теоремою 13.7 це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} (2x-3)(6x+1) = (9-4x)^2, \\ \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 14x + 21 = 0, \\ \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 7 - 2\sqrt{7}, \\ x = 7 + 2\sqrt{7}, \end{cases} & x = 7 - 2\sqrt{7}. \\ \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{4}; \end{cases}$$

Відповідь: $7 - 2\sqrt{7}$. ◀

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$.

Розв'язання. Областю визначення даного рівняння є множина $M = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$. Обидві частини даного рівняння на цій множині набувають невід'ємних значень, тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню $(\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{2x+1})^2$.

$$\text{Звідси } 2\sqrt{2x-5}\sqrt{x+2} = 4 - x.$$

Скориставшись теоремою 13.7, отримуємо:

$$\begin{cases} 4(2x-5)(x+2) = (4-x)^2, \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} 7x^2 + 4x - 56 = 0, \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{-2-6\sqrt{11}}{7}, \\ x = \frac{-2+6\sqrt{11}}{7}, \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{-2+6\sqrt{11}}{7}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1}.$$

Розв'язання. Розкладемо квадратні тричлени, які стоять під радикалами, на множники:

$$\sqrt{(x+1)(4x+5)} - \sqrt{(x+1)(2x-1)} = \sqrt{(x-1)(x+1)}.$$

Тепер важливо не зробити поширену помилку, яка полягає в застосуванні теореми про корінь з добутку в такому вигляді: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Насправді записана формула має місце лише для $a \geq 0$ і $b \geq 0$, а якщо $a \leq 0$ і $b \leq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

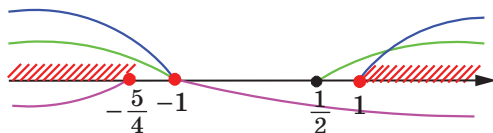


Рис. 13.3

Оскільки область визначення даного рівняння є множина $(-\infty; -\frac{5}{4}] \cup [1; +\infty) \cup \{-1\}$ (рис. 13.3), то воно рівносильне сукупності двох систем та одного рівняння.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \begin{cases} x \geq 1, \\ \sqrt{x+1} \sqrt{4x+5} - \sqrt{x+1} \sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} \sqrt{x+1}; \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \geq 1, \\ \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ 2\sqrt{2x-1} \sqrt{x-1} = x+7; \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \geq 1, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x = 5, \\ x = -\frac{9}{7}; \end{cases} \quad x = 5. \\
 2) \quad & \begin{cases} x \leq -\frac{5}{4}, \\ \sqrt{-x-1} \sqrt{-4x-5} - \sqrt{-x-1} \sqrt{-2x+1} = \sqrt{-x+1} \sqrt{-x-1}; \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \leq -\frac{5}{4}, \\ \sqrt{-2x+1} + \sqrt{-x+1} = \sqrt{-4x-5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -\frac{5}{4}, \\ 2\sqrt{-2x+1} \sqrt{-x+1} = -x-7; \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \leq -7, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -7, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -7, \\ x = 5, \\ x = -\frac{9}{7}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Зрозуміло, що ця система розв'язків не має.

$$3) x + 1 = 0; x = -1.$$

Відповідь: $-1; 5$. ◀



1. Яке рівняння називають ірраціональним?
2. Сформулюйте теореми про рівносильні переходи під час розв'язування ірраціональних рівнянь.
3. Як можна виявити сторонні корені рівняння?

ВПРАВИ

13.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{3-x}$;

2) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{1-2x}$;

3) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-3}$;

4) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2+4x-16}$.

13.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{x+3} = \sqrt[4]{2x-3}$;

2) $\sqrt{4x-5} = \sqrt{1-x}$;

3) $\sqrt[5]{x^2-25} = \sqrt[5]{2x+10}$;

4) $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$.

13.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2-x} = x$;

2) $\sqrt{x+1} = x-1$;

3) $\sqrt{3x-2} = x$;

4) $\sqrt{x^2-1} = 3-2x$;

5) $x - \sqrt{2x^2+x-21} = 3$;

6) $x+2 + \sqrt{8-3x-x^2} = 0$.

13.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10-3x} = -x$;

2) $\sqrt{2x^2+5x+4} = 2x+2$;

3) $\sqrt{x+2} = 1-x$;

4) $x - \sqrt{3x^2-11x-20} = 5$.

13.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)} = x-4$;

2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)} + 2 = x$;

3) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20} = 6x+12$;

4) $(x+1)\sqrt{x^2-5x+5} = x+1$.

13.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)} = 3x-1$;

2) $(x-1)\sqrt{x^2-3x-3} = 5x-5$.

13.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}} = x+1$;

2) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x-1$.

13.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$;

2) $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} = 1$;

3) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$;

4) $2\sqrt{2-x} - \sqrt{7-x} = 1$.

13.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2$;

2) $\sqrt{x+11} - \sqrt{2x+1} = 2$.

13.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3$;

2) $\sqrt{x-7} + \sqrt{x-1} = 4$;

3) $\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+3} = 2$;

4) $\sqrt{13-4x} + \sqrt{x+3} = 5$.

13.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} = 3$;

2) $\sqrt{5x+1} + \sqrt{7-x} = 6$.

13.12.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}; \quad 3) 2\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-9};$$

$$2) \sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-1}; \quad 4) \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}.$$

13.13.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x+2} + \sqrt{3x+7} = \sqrt{8-x}; \quad 2) \sqrt{6x-11} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}.$$

13.14.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} - 6\sqrt{x-2} = 6;$$

$$2) \sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1;$$

$$3) \sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} = 4.$$

13.15.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} = 6;$$

$$2) \sqrt{x+6} + 2\sqrt{x+5} - \sqrt{x+6} - 2\sqrt{x+5} = 2.$$

13.16.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+2x-8} = \sqrt{x^2-6x+8};$$

$$2) \sqrt{2x^2+5x+2} - \sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{3x+6}.$$

13.17.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-6x+8} = \sqrt{x^2-11x+18};$$

$$2) \sqrt{x^2-3x-10} + \sqrt{x^2+3x+2} = \sqrt{x^2+8x+12}.$$

13.18.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a - x.$$

13.19.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння

$$2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} = a - x.$$

13.20.* При яких значеннях параметра a рівняння $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2} - 15$ має єдиний розв'язок?

13.21.* При яких значеннях параметра a рівняння $\sqrt{4x - x^2} - 3 = x - a$ має єдиний розв'язок?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

13.22. Між числами -4 і 5 вставте п'ять таких чисел, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

13.23. Які три числа треба вставити між числами 256 і 1 , щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію?

14. Різні прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь та їхніх систем

У попередньому пункті ви ознайомилися з методами розв'язування ірраціональних рівнянь, заснованими на піднесенні обох частин рівняння до одного й того самого степеня.

Розширимо арсенал прийомів розв'язування ірраціональних рівнянь.

Насамперед звернемося до методу заміни змінної.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = t$. Тоді $x^2 + 3x - 18 = t^2 - 12$, і дане рівняння набуває вигляду $t^2 - 12 + 4t = 0$.

$$\text{Звідси } \begin{cases} t = -6, \\ t = 2. \end{cases}$$

Оскільки $t \geq 0$, то підходить лише $t = 2$. Отже, дане рівняння рівносильне такому: $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2$.

Звідси $x^2 + 3x - 6 = 4$; $x = -5$ або $x = 2$.

Відповідь: -5 ; 2 . ◀

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} - 12.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = t$. Тоді, підносячи до квадрата обидві частини останньої рівності, отримаємо

$$2x + 2\sqrt{x^2 - 16} = t^2.$$

Тепер дане рівняння можна переписати так: $t = t^2 - 12$. Звідси $t = 4$ або $t = -3$.

Очевидно, що рівняння $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = -3$ не має розв'язків. Отже, початкове рівняння рівносильне такому: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4$.

$$\text{Далі, } \begin{cases} x \geq 4, \\ 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ \sqrt{x^2 - 16} = 8 - x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 8, \\ x^2 - 16 = 64 - 16x + x^2; \end{cases} \quad x = 5.$$

Відповідь: 5 . ◀

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $2(x+1) - x\sqrt{x+1} - x^2 = 0$.

Розв'язання. Оскільки число 0 не є коренем цього рівняння, то рівняння $\frac{2(x+1)}{x^2} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} - 1 = 0$ рівносильне даному. Нехай $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = t$, тоді $2t^2 - t - 1 = 0$.

Звідси $t = 1$ або $t = -\frac{1}{2}$. Маємо:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = 1, \\ \frac{\sqrt{x+1}}{x} = -\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x+1 = x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ 4x+4 = x^2; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ x = 2-2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $2-2\sqrt{2}$. ◀

Метод заміни змінних є ефективним і для розв'язування систем ірраціональних рівнянь.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{xy+22} = 5, \\ \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{xy+22} = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[4]{x+y} = a$, $\sqrt[4]{xy+22} = b$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Тоді дана система набуває вигляду $\begin{cases} a^2 + b^2 = 5, \\ a + b = 3. \end{cases}$ Далі маємо:

$$\begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 5, \\ a+b = 3; \end{cases} \begin{cases} ab = 2, \\ a+b = 3. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} a = 1, \\ b = 2 \end{cases}$ або $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$

Отже, дана система рівносильна сукупності двох систем

$$\begin{cases} \begin{cases} \sqrt[4]{x+y} = 1, \\ \sqrt[4]{xy+22} = 2, \\ \sqrt[4]{x+y} = 2, \\ \sqrt[4]{xy+22} = 1, \end{cases} \end{cases} \text{ звідси } \begin{cases} \begin{cases} x+y = 1, \\ xy = -6, \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = 16, \\ xy = -21. \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язавши останні дві системи, отримуємо відповідь.

Відповідь: $(3; -2)$, $(-2; 3)$, $(8 + \sqrt{85}; 8 - \sqrt{85})$, $(8 - \sqrt{85}; 8 + \sqrt{85})$. ◀

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{2-x} = a$, $\sqrt[3]{7+x} = b$. Тоді

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3, \\ a^3 + b^3 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3, \\ (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} (a+b)^2 - 3ab = 3, \\ a+b = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 2, \\ a+b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \\ a = 2, \\ b = 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Тепер можна записати:} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1, \\ \sqrt[3]{7+x} = 2, \\ \sqrt[3]{2-x} = 2, \\ \sqrt[3]{7+x} = 1; \end{cases} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ x = -6. \end{cases}$$

Відповідь: 1; -6. ◀

ВПРАВИ

14.1.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $2\sqrt{x+1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x+1}}$;

3) $\sqrt{\frac{x+5}{x-1}} + 7\sqrt{\frac{x-1}{x+5}} = 8$;

2) $x^2 - x + 9 + \sqrt{x^2 - x + 9} = 12$;

4) $\frac{x\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} - \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x+1}} = 4$.

14.2.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\sqrt{x+5} - 3\sqrt[4]{x+5} + 2 = 0$;

3) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 4} = 2$;

2) $\sqrt[6]{9-6x+x^2} + 2\sqrt[6]{3-x} - 8 = 0$;

4) $\sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}} + \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}} = 2,5$.

14.3.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$;

3) $2x^2 + 6x - 3\sqrt{x^2 + 3x - 3} = 5$;

2) $\sqrt{3x^2 - 9x - 26} = 12 + 3x - x^2$;

4) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 72$.

14.4.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2 - 4x - 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 10 = 0$;

2) $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4 + 3x - x^2$;

3) $\sqrt{2x^2 - 6x + 40} = x^2 - 3x + 8$;

4) $5x^2 + 10x + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 123$.

14.5.* Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ x + y + 4\sqrt{xy} = 37; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{x-y} = 4, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{4-x+y} + \sqrt{9-2x+y} = 7, \\ 2y - 3x = 12. \end{cases}$$

14.6.* Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x + y = 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 8y^2 = 18 - 18y. \end{cases}$$

14.7.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x$.

14.8.** Розв'яжіть рівняння $x + \sqrt{(x+6)(x-2)} = 2 + \sqrt{x+6} + \sqrt{x-2}$.

14.9.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$.

14.10.** Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2}{\sqrt{2x+5}} + \sqrt{2x+5} = 2x$.

14.11.** Розв'яжіть рівняння $4x^2 + 12x\sqrt{1+x} = 27(1+x)$.

14.12.** Розв'яжіть рівняння $6x^2 - 5x\sqrt{x+3} + x + 3 = 0$.

14.13.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{(6-x)^2} - \sqrt[3]{(x+3)(6-x)} = 3$.

14.14.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{(x+4)^2} + \sqrt[3]{(x-5)^2} + \sqrt[3]{(x+4)(x-5)} = 3$.

14.15.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2$.

14.16.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{18+5x} + \sqrt[4]{64-5x} = 4$.

14.17.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x-1} = 5$.

14.18.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

14.19.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2-\sqrt{2-x}} = x$.

14.20.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{6-\sqrt{6-x}} = x$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

14.21. Придумайте нерівність виду $ax + b < 0$, де x — змінна, a і b — деякі числа, множиною розв'язків якої є:

1) проміжок $(-\infty; 4)$;

3) множина дійсних чисел;

2) проміжок $(-3; +\infty)$;

4) порожня множина.

15. Ірраціональні нерівності

Нагадаємо основні відомості про рівносильність нерівностей.

Означення. Дві нерівності називають **рівносильними**, якщо множини їхніх розв'язків є рівними.

Розв'язуючи рівняння методом рівносильних переходів, ми заміняли його іншим, простішим рівнянням, рівносильним даному. Аналогічним чином розв'язують і нерівності, використовуючи такі теореми.

Теорема 15.1. Якщо до обох частин нерівності додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Теорема 15.2. Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Теорема 15.3. Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Означення. Якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу нерівність називають **наслідком** першої нерівності.

Розглянемо теореми, за допомогою яких розв'язують основні типи ірраціональних нерівностей. Доведення цих теорем аналогічні доведенню теореми 13.3.

Теорема 15.4. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 3x + 1} \geq \sqrt{3x - 4}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 \geq 3x - 4, \\ 3x - 4 \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0, \\ x \geq \frac{4}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ x \leq 1, \\ x \geq \frac{4}{3}; \end{cases} \quad x \geq 5.$$

Відповідь: $[5; +\infty)$. ◀

Теорема 15.5. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 < (x-1)^2, \\ x-1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \geq 0. \end{cases} \quad \text{Звідси } \begin{cases} -2 < x < 3, \\ x > 1, \\ x \leq -1 \text{ або } x \geq 2,5. \end{cases}$$

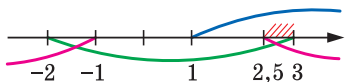


Рис. 15.1

Розв'язування цієї системи проілюстровано на рисунку 15.1. Отримуємо $2,5 \leq x < 3$.

Відповідь: $[2,5; 3)$. ◀

Теорема 15.6. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох систем

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 + 7x + 12} > 6 - x$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем.

$$1) \begin{cases} 6 - x < 0, \\ x^2 + 7x + 12 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 6, \\ x \leq -4, \quad x > 6. \\ x \geq -3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 6-x \geq 0, \\ x^2+7x+12 > (6-x)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 6, \\ x > \frac{24}{19}; \end{cases} \quad \frac{24}{19} < x \leq 6.$$

Відповідь: $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$. ◀

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$(x-3)(\sqrt{x^2+4}-x-3) \leq 0.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем.

$$1) \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \sqrt{x^2+4} \leq x+3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2+4 \leq x^2+6x+9; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3, \\ x \geq -\frac{5}{6}; \end{cases} \quad x \geq 3.$$

$$2) \begin{cases} x-3 \leq 0, \\ \sqrt{x^2+4} \geq x+3. \end{cases} \quad \text{Друга нерівність системи рівносильна сукуп-$$

ності $\begin{cases} x+3 < 0, \\ x+3 \geq 0, \\ x^2+4 \geq (x+3)^2. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x < -3, \\ -3 \leq x \leq -\frac{5}{6}; \end{cases} \quad x \leq -\frac{5}{6}$. Тоді маємо:

$$\begin{cases} x \leq 3, \\ x \leq -\frac{5}{6}; \end{cases} \quad x \leq -\frac{5}{6}.$$

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty)$. ◀

Нерівність прикладу 4 можна розв'язати інакше, використовуючи метод інтервалів. Справді, розв'язавши рівняння

$$(x-3)(\sqrt{x^2+4}-x-3) = 0, \quad \text{отримуємо два корені } x = 3, \quad x = -\frac{5}{6}.$$

Розв'язування даної нерівності проілюстровано на рисунку 15.2.

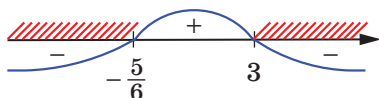


Рис. 15.2

Під час розв'язування ірраціональних нерівностей можна користуватися більш загальною теоремою.

Теорема 15.7. Якщо для будь-якого $x \in M$ виконуються нерівності $f(x) \geq 0$ і $g(x) \geq 0$, то нерівності $f(x) > g(x)$ і $(f(x))^{2k} > (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні на множині M .

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} \leq 2\sqrt{x}$.

Розв'язання. Обидві частини даної нерівності набувають невід'ємних значень на множині $M = [3; +\infty)$, яка є областю визначення цієї нерівності. Тому дана нерівність на множині M рівносильна нерівності

$$(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3})^2 \leq (2\sqrt{x})^2.$$

Звідси $2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3} \leq x+2$.

На множині $M = [3; +\infty)$ обидві частини останньої нерівності набувають невід'ємних значень. Тоді за теоремою 15.7 отримуємо:

$$\begin{cases} 4(2x+1)(x-3) \leq (x+2)^2, \\ x \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x^2 - 24x - 16 \leq 0, \\ x \geq 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{7} \leq x \leq 4, \\ x \geq 3; \end{cases} \quad 3 \leq x \leq 4.$$

Відповідь: $[3; 4]$. ◀



Сформулюйте теореми про рівносильні переходи під час розв'язування ірраціональних нерівностей.

ВПРАВИ

15.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$;

3) $\sqrt{8-5x} \geq \sqrt{x^2-16}$;

2) $\sqrt{x^2-3x+1} > \sqrt{2x-3}$;

4) $\sqrt{x^2-3x+2} < \sqrt{2x^2-3x+1}$.

15.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x^2+6x-3} \geq \sqrt{x^2+4x}$;

2) $\sqrt{x^2+3x-10} < \sqrt{x-2}$.

15.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x > \sqrt{24-5x}$;

3) $3-x > 3\sqrt{1-x^2}$;

2) $\sqrt{2x+7} \leq x+2$;

4) $\sqrt{7x-x^2-6} < 2x+3$.

15.4.* Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\sqrt{9x-20} < x$;
- 2) $\sqrt{x+61} < x+5$;
- 3) $2\sqrt{4-x^2} \leq x+4$;
- 4) $\sqrt{x^2+4x-5} < x-3$.

15.5.* Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\sqrt{x+7} \geq x+1$;
- 2) $\sqrt{x^2-2x} \geq 4-x$;
- 3) $\sqrt{x^2+x-2} > x$;
- 4) $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

15.6.* Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\sqrt{x+2} > x$;
- 2) $\sqrt{2x+14} > x+3$;
- 3) $\sqrt{x^2-5x-24} \geq x+2$;
- 4) $\sqrt{x^2+4x-5} > x-3$.

15.7.* Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x+10)\sqrt{x-4} \leq 0$;
- 2) $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geq 0$.

15.8.* Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0$;
- 2) $(x^2-9)\sqrt{16-x^2} \geq 0$.

15.9.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$;
- 2) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$;
- 3) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$;
- 4) $\frac{\sqrt{x^2-3x-4}-3x+16}{6-x} > 1$.

15.10.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x+1)\sqrt{x^2+1} > x^2-1$;
- 2) $\frac{\sqrt{x+20}}{x}-1 < 0$;
- 3) $\frac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \leq \frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$;
- 4) $\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} \leq 1$.

15.11.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3} > 1$;
- 2) $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

15.12.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x+10} \leq 1$;
- 2) $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x} > \sqrt{x+21}$.

15.13.** Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x^3+x+6} \geq 4$.

15.14.** Розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x^3+8} < 4$.

15.15.* При яких значеннях параметра a множиною розв'язків не-

рівності $\sqrt{1-(x+2a)^2} \geq \frac{4}{3}x$ є проміжок завдовжки $\frac{9}{5}$?

15.16.* При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $\sqrt{1-x^2} \geq \frac{4}{3}(x-a)$ є проміжок завдовжки $\frac{9}{5}$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

15.17. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{4a - 20b}{12ab};$$

$$3) \frac{m^2 - 5mn}{15n - 3m};$$

$$5) \frac{x^2 - 25}{5x^2 - x^3};$$

$$2) \frac{m^3 + 1}{m^2 - m + 1};$$

$$4) \frac{7a^4 - a^3b}{b^4 - 7ab^3};$$

$$6) \frac{y^2 - 12y + 36}{36 - y^2}.$$

15.18. Виконайте дії:

$$1) \left(\frac{3c+1}{3c-1} - \frac{3c-1}{3c+1} \right) : \frac{2c}{6c+2};$$

$$2) \left(\frac{1}{a^2 - 4ab + 4b^2} - \frac{1}{4b^2 - a^2} \right) : \frac{2a}{a^2 - 4b^2};$$

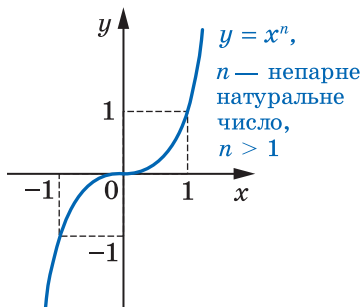
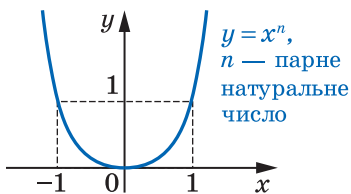
$$3) \left(\frac{a}{a-1} - \frac{a}{a+1} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) : \frac{a^2+a}{(a-1)^2}.$$



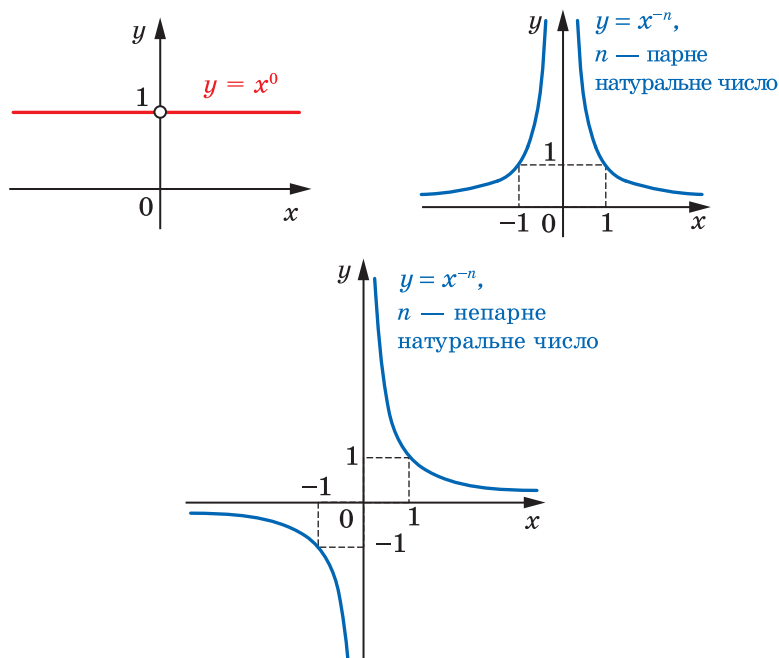
ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Степенева функція

Функцію $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, називають степеневою функцією з натуральним показником.



Функцію $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають степеневою функцією із цілим показником.



Корінь n -го степеня

Коренем n -го степеня із числа a , де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n -й степінь якого дорівнює a .

Якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то корінь n -го степеня з будь-якого числа існує, причому тільки один.

При будь-якому a виконується рівність $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Якщо n — парне натуральне число, то при $a < 0$ корінь n -го степеня із числа a не існує; при $a = 0$ корінь n -го степеня із числа a дорівнює 0; при $a > 0$ існують два протилежних числа, які є коренями n -го степеня із числа a .

Арифметичний корінь n -го степеня

Арифметичним коренем n -го степеня з невід'ємного числа a , де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n -й степінь якого дорівнює a .

Властивості кореня n -го степеня

Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{N}$ виконуються рівності: ${}^{2k+1}\sqrt{a^{2k+1}} = a$;
 ${}^{2k}\sqrt{a^{2k}} = |a|$; ${}^{2k+1}\sqrt{-a} = -{}^{2k+1}\sqrt{a}$.

Якщо $a \geq 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Якщо $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.

Якщо $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Якщо $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Степень з раціональним показником

Степенем додатного числа a з раціональним показником r , поданим у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число

$$\sqrt[n]{a^m}, \text{ тобто } a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$0^{\frac{m}{n}} = 0$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконуються рівності

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають степеневою функцією з раціональним показником.

Іраціональні рівняння

Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримуємо рівняння, яке є наслідком даного.

Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Якщо для будь-якого $x \in M$ виконуються нерівності $f(x) \geq 0$ і $g(x) \geq 0$, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні на множині M .

Іраціональні нерівності

Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

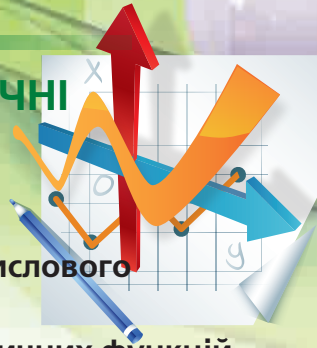
Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох си-

стем $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$

Якщо для будь-якого $x \in M$ виконуються нерівності $f(x) \geq 0$ і $g(x) \geq 0$, то нерівності $f(x) > g(x)$ і $(f(x))^{2k} > (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні на множині M .

§ 3

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ



- 16.** Радіанна міра кута
- 17.** Тригонометричні функції числового аргументу
- 18.** Знаки значень тригонометричних функцій
- 19.** Періодичні функції
- 20.** Властивості та графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$
- 21.** Властивості та графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$
- 22.** Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу
- 23.** Формули додавання
- 24.** Формули зведення
- 25.** Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів
- 26.** Формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій

- Вивчаючи матеріал цього параграфу, ви розширите свої знання про тригонометричні функції та їхні властивості; дізнаєтеся, що таке радіанна міра кута, які функції називають періодичними.
- Ознайомитеся з формулами, які зв'язують різні тригонометричні функції, навчитесь застосовувати їх для виконання обчислень, спрощення виразів, доведення тотожностей.

16. Радіанна міра кута

Досі для вимірювання кутів ви використовували градуси або частини градуса — мінути та секунди.

У багатьох випадках зручно користуватися іншою одиницею вимірювання кутів. Її називають **радiаном**.

Означення. **Кутом в один радiан** називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

На рисунку 16.1 зображено центральний кут AOB , що спирається на дугу AB , довжина якої дорівнює радіусу кола. Величина кута AOB дорівнює одному радiану. Записують: $\angle AOB = 1$ рад. Також говорять, що радiанна міра AB дорівнює одному радiану. Записують: $\cup AB = 1$ рад.

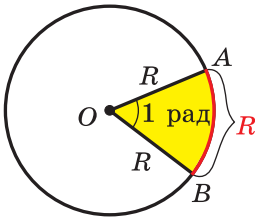


Рис. 16.1

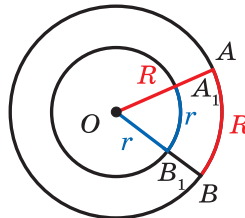


Рис. 16.2

Радіанна міра кута (дуги) не залежить від радіуса кола. Справді, розглянемо два кола зі спільним центром O і радіусами R і r ($R > r$) (рис. 16.2). Сектор AOB гомотетичний сектору A_1OB_1 із центром O і коефіцієнтом $\frac{R}{r}$. Тоді якщо довжина дуги AB дорівнює радіусу R , то довжина дуги A_1B_1 дорівнює радіусу r .

На рисунку 16.3 зображено коло радіуса R і дугу MN , довжина якої дорівнює $\frac{3}{2}R$. У цьому випадку вважають, що радiанна міра кута MON (дуги MN) дорівнює $\frac{3}{2}$ рад. Узагалі, якщо центральний кут кола радіуса R спирається на

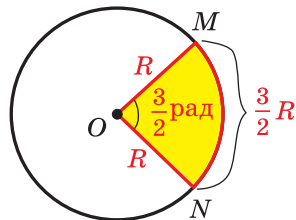


Рис. 16.3

дугу, довжина якої дорівнює αR , то говорять, що **радіанна міра цього центрального кута дорівнює α рад**.

Довжина півкола дорівнює πR . Отже, радіанна міра півкола дорівнює π рад. Градусна міра півкола становить 180° . Сказане дає змогу встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ. \quad (1)$$

Звідси

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

Поділивши 180 на 3,14 (нагадаємо, що $\pi \approx 3,14$), можна встановити: $1 \text{ рад} \approx 57^\circ$.

Якщо обидві частини рівності (1) поділити на 180, то отримаємо:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \quad (2)$$

За цією формулою легко знайти, що, наприклад,

$$15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}, \quad 90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад},$$

$$135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}.$$

Записуючи радіанну міру кута, зазвичай позначення «рад» опускають. Наприклад, записують: $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$.

У таблиці наведено градусні та радіанні міри кутів, які зустрічаються найчастіше:

Градусна міра кута	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радіанна міра кута	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Використовуючи радіанну міру кута, можна отримати зручну формулу для обчислення довжини дуги кола. Оскільки центральний кут в 1 рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу R , то кут в α рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR . Якщо довжину дуги, що містить α рад, позначити l , то можна записати:

$$l = \alpha R$$

На координатній площині розглянемо коло одиничного радіуса із центром у початку координат. Таке коло називають **одиничним**.

Нехай точка P , починаючи рух від точки $P_0(1; 0)$, переміщується по одиничному колу проти годинникової стрілки. У певний момент часу вона займе положення, при якому $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (рис. 16.4). Говоритимемо, що точку P отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $\frac{2\pi}{3}$ (на кут 120°). Записують: $P = R_O^{\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

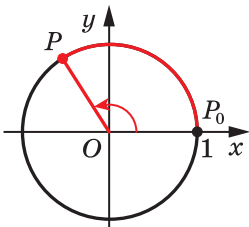


Рис. 16.4

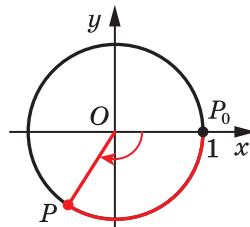


Рис. 16.5

Нехай тепер точка P перемістилася по одиничному колу за годинниковою стрілкою та зайняла положення, при якому $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (рис. 16.5). Говоритимемо, що точку P отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $-\frac{2\pi}{3}$ (на кут -120°). Записують: $P = R_O^{-\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

Узагалі, коли розглядають рух точки по колу проти годинникової стрілки (рис. 16.4), то кут повороту вважають додатним, а коли за годинниковою стрілкою (рис. 16.5) — то від'ємним.

Розглянемо ще кілька прикладів. Звернемося до рисунка 16.6. Можна сказати, що точку A отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$ (на кут 90°) або на кут $-\frac{3\pi}{2}$ (на кут -270°), тобто $A = R_O^{\frac{\pi}{2}}(P_0)$, $A = R_O^{-\frac{3\pi}{2}}(P_0)$.

Точку B отримано в результаті повороту точки P_0 на кут π (на кут 180°) або

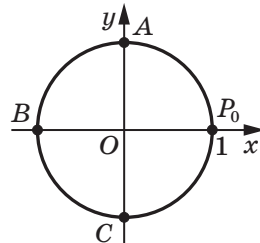


Рис. 16.6

на кут $-\pi$ (на кут -180°), тобто $B = R_O^\pi(P_0)$, $B = R_O^{-\pi}(P_0)$. Точку C отримано в результаті повороту точки P_0 на кут $\frac{3\pi}{2}$ (на кут 270°) або на кут $-\frac{\pi}{2}$ (на кут -90°), тобто $C = R_O^{\frac{3\pi}{2}}(P_0)$, $C = R_O^{-\frac{\pi}{2}}(P_0)$.

Якщо точка P , рухаючись по одиничному колу, зробить повний оберт, то можна говорити, що кут повороту дорівнює 2π (тобто 360°) або -2π (тобто -360°).

Якщо точка P зробить півтора оберту проти годинникової стрілки, то природно вважати, що кут повороту дорівнює 3π (тобто 540°), якщо за годинниковою стрілкою — то -3π (тобто -540°).

Величина кута повороту як у радіанах, так і в градусах може виражатися будь-яким дійсним числом.

Кут повороту однозначно визначає положення точки P на одиничному колі. Проте будь-якому положенню точки P на колі відповідає безліч кутів повороту. Наприклад, на рисунку 16.7 точці P

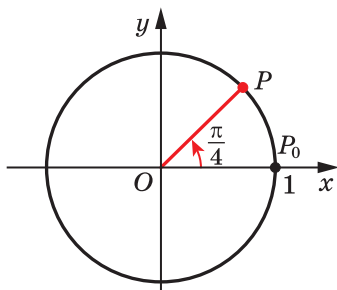


Рис. 16.7

відповідають такі кути повороту: $\frac{\pi}{4}$,

$\frac{\pi}{4} + 2\pi$, $\frac{\pi}{4} + 4\pi$, $\frac{\pi}{4} + 6\pi$ і т. д., а також

$\frac{\pi}{4} - 2\pi$, $\frac{\pi}{4} - 4\pi$, $\frac{\pi}{4} - 6\pi$ і т. д.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність точку P одиничного кола таку, що $P = R_O^\alpha(P_0)$. Тим самим ми задали відображення множини дійсних чисел на множину точок одиничного кола.

Зауважимо, що це відображення не є взаємно однозначним: кожній точці одиничного кола відповідає безліч дійсних чисел. Наприклад, на рисунку 16.7 точці P відповідають усі дійсні числа виду $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Звернемо увагу на те, що множину чисел виду $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

можна задати й інакше. Наприклад: $\frac{9\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, або

$-\frac{7\pi}{4} + 2\pi t$, $t \in \mathbb{Z}$.



1. Що називають кутом в один радіан?
2. Чому дорівнює довжина дуги кола радіуса R , яка містить α рад?
3. Скільки точок визначає на одиничному колі кут повороту?
4. Скільки кутів повороту відповідають положенню точки на одиничному колі?

ВПРАВИ

16.1.° Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

- 1) 25° ; 2) 40° ; 3) 100° ; 4) 160° ; 5) 210° ; 6) 300° .

16.2.° Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

- 1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1,2\pi$; 5) 3π ; 6) $2,5\pi$.

16.3.° Обчисліть довжину дуги кола, якщо відомо її радіанну міру α та радіус R кола:

- 1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ см; 3) $\alpha = 0,4\pi$, $R = 2$ см.

16.4.° Порівняйте величини кутів, заданих у радіанах:

- 1) $\frac{\pi}{2}$ і $1,5$; 2) $-\frac{\pi}{2}$ і -2 ; 3) $\frac{\pi}{3}$ і 1 .

16.5.° Порівняйте величини кутів, заданих у радіанах:

- 1) $\frac{\pi}{4}$ і 1 ; 2) $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{\pi}{6}$.

16.6.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- 1) $\frac{5\pi}{3}$; 2) -45° ; 3) -120° ; 4) 450° ; 5) -480° ; 6) $-\frac{7\pi}{3}$.

16.7.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- 1) 225° ; 2) -315° ; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $-\frac{5\pi}{6}$; 5) 6π ; 6) -720° .

16.8.° У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- 1) 400° ; 2) 750° ; 3) -470° ; 4) $-\frac{7\pi}{6}$; 5) $-1,8\pi$; 6) $6?$

16.9.° У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- 1) -380° ; 2) -800° ; 3) $5,5\pi$; 4) $-\frac{11\pi}{6}$; 5) 1 ; 6) $-3?$

16.10.° Знайдіть координати точки одиничного кола, отриманої в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- 1) -90° ; 2) -180° ; 3) $\frac{5\pi}{2}$; 4) $-\frac{3\pi}{2}$; 5) 450° ; 6) -2π .

16.11.° Які координати має точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π ; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) 180° ; 5) -540° ?

16.12.° Укажіть найменший додатний і найбільший від'ємний кути, на які треба повернути точку $P_0(1; 0)$, щоб отримати точку з координатами:

- 1) $(0; 1)$; 2) $(-1; 0)$; 3) $(0; -1)$; 4) $(1; 0)$.

16.13.° Укажіть усі дійсні числа, які відповідають точці P одиничного кола (рис. 16.8).

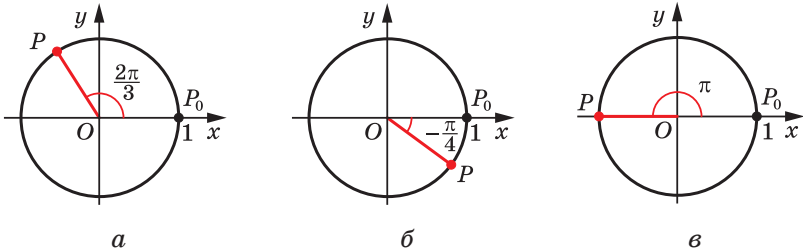


Рис. 16.8

16.14.° Укажіть усі дійсні числа, які відповідають точці P одиничного кола (рис. 16.9).

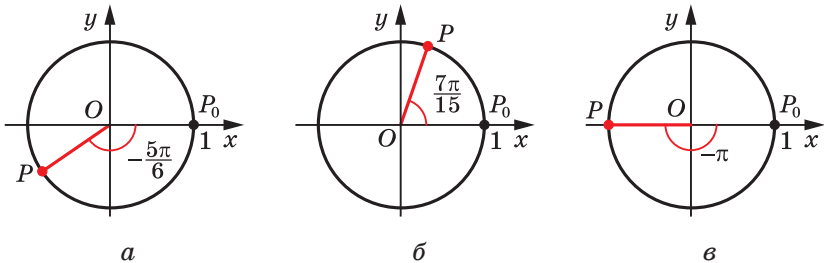


Рис. 16.9

16.15.° Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути:

- 1) $-\frac{\pi}{2} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

16.16.* Побудуйте на одиничному колі точки, яким відповідає така множина чисел:

$$1) \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad 2) -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad 3) \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

16.17.* Знайдіть усі кути, на які треба повернути точку $P_0(1; 0)$, щоб отримати точку:

$$1) P_1(0; 1); \quad 2) P_2(-1; 0); \quad 3) P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \quad 4) P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

16.18.* Знайдіть усі кути, на які треба повернути точку $P_0(1; 0)$, щоб отримати точку:

$$1) P_1(0; -1); \quad 2) P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad 3) P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

16.19.* Доведіть, що площу сектора, який містить дугу в α рад, можна обчислити за формулою $S = \frac{\alpha R^2}{2}$, де R — радіус кола.

16.20.** Спростіть:

$$\begin{aligned} 1) & \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}; \\ 2) & \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap \{\pi + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}; \\ 3) & \left\{\pm \frac{\pi}{3} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}; \\ 4) & \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{\frac{3\pi n}{10} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

16.21.** Спростіть:

$$\begin{aligned} 1) & \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}; \\ 2) & \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}; \\ 3) & \left\{\pm \frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}; \\ 4) & \left\{\frac{\pi n}{12} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{\frac{\pi}{3} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

16.22. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$\begin{aligned} 1) & 7a - 3 \geq 7(a + 1); & 4) & 9 - x^2 \geq 0; \\ 2) & 4(2 + 3b) - 3(4b - 3) > 0; & 5) & 6x^2 - 2x < 0; \\ 3) & x^2 + x - 2 \leq 0; & 6) & -x^2 + 3x + 4 > 0. \end{aligned}$$

17. Тригонометричні функції числового аргументу

Поняття «синус», «косинус» і «тангенс» кутів від 0° до 180° відомі вам з курсу геометрії 9 класу. Узагальнимо ці поняття для довільного кута повороту α .

Вводячи означення тригонометричних функцій кутів від 0° до 180° , ми користувалися одиничним півколом. Для довільних кутів повороту природно звернутися до одиничного кола (рис. 17.1).

Означення. Косинусом і синусом кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки $P(x; y)$ одиничного кола такої, що $P = R_O^\alpha(P_0)$ (рис. 17.1).

Записують: $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$.

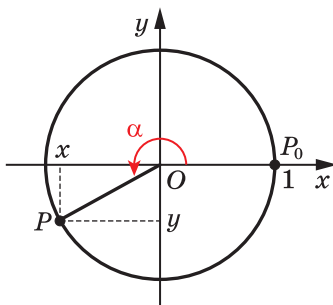


Рис. 17.1

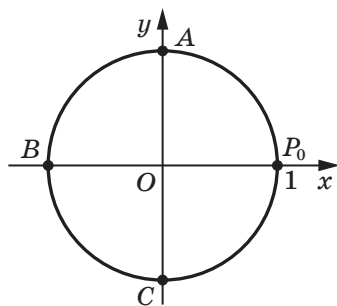


Рис. 17.2

Точки P_0 , A , B і C (рис. 17.2) мають відповідно координати $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. Ці точки отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ відповідно на кути 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$. Отже, користуючись даним означенням, можна скласти таблицю¹:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

¹ На форзаці 4 наведено таблицю значень тригонометричних функцій деяких кутів.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть усі кути повороту α , при яких:
1) $\sin \alpha = 0$; 2) $\cos \alpha = 0$.

Розв'язання. 1) Ординату, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: P_0 і B (рис. 17.2). Ці точки отримано в результаті поворотів точки P_0 на такі кути:

$$0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \text{ або} \\ -\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$$

Усі ці кути можна знайти за допомогою формули $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.
Отже, $\sin \alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

2) Абсцису, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: A і C (рис. 17.2). Ці точки отримано в результаті поворотів точки P_0 на такі кути:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 3\pi, \dots \text{ або} \\ \frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} - 3\pi, \dots$$

Усі ці кути можна знайти за допомогою формули $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отже, $\cos \alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ◀

Означення. Тангенсом кута повороту α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Означення. Котангенсом кута повороту α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Наприклад, $\operatorname{tg} \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = 0$, $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0$.

З означення тангенса випливає, що тангенс визначений для тих кутів повороту α , для яких $\cos \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

З означення котангенса випливає, що котангенс визначений для тих кутів повороту α , для яких $\sin \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ви знаєте, що кожному куту повороту α відповідає *єдина* точка одиничного кола. Отже, кожному значенню кута α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, котангенса для $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$) кута α . Через це залежність значення синуса (косинуса, тангенса, котангенса) від величини кута повороту є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin \alpha$, $g(\alpha) = \cos \alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута повороту α .

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність кут α рад. Це дає змогу розглядати тригонометричні функції числового аргументу.

Наприклад, запис $\sin 2$ означає «синус кута 2 радіани».

З означень синуса та косинуса випливає, що область визначення функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є множина \mathbb{R} .

Оскільки абсциси й ординати точок одиничного кола набувають усіх значень від -1 до 1 включно, то область значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$.

Кутам повороту α і $\alpha + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка одиничного кола, тому

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin(\alpha + 2\pi n), n \in \mathbb{Z} \\ \cos \alpha &= \cos(\alpha + 2\pi n), n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

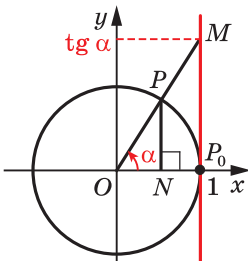


Рис. 17.3

Область визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Область визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Щоб знайти області значень цих функцій, звернемося до такої геометричної інтерпретації.

Проведемо пряму $x = 1$ (рис. 17.3). Вона проходить через точку $P_0(1; 0)$ і дотикається до одиничного кола.

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут α і розміщено так, як показано на рисунку 17.3. Пряма OP перетинає пряму $x = 1$ у точці M . Проведемо $PN \perp OP_0$.

Із подібності трикутників OPN і OMP_0 випливає, що $\frac{PN}{ON} = \frac{MP_0}{OP_0}$.

Оскільки $PN = \sin \alpha$, $ON = \cos \alpha$, $OP_0 = 1$, то $MP_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

Отже, ордината точки M дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$.

Можна показати, що й при будь-якому іншому положенні точки P на одиничному колі виконується таке: якщо пряма OP перетинає пряму $x = 1$, то ордината точки перетину дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$. Тому пряму $x = 1$ називають **віссю тангенсів**.

Зрозуміло, що внаслідок зміни положення точки P на одиничному колі (рис. 17.4) точка M може зайняти довільне положення на прямій $x = 1$, тобто ординатою точки M може бути будь-яке число. Це означає, що областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина \mathbb{R} .

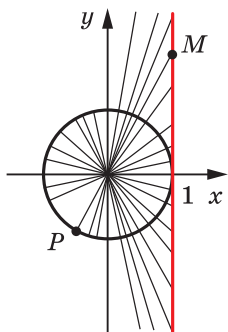


Рис. 17.4

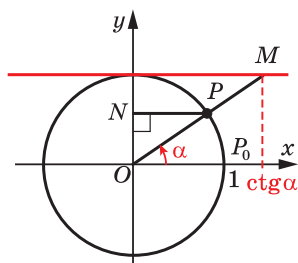


Рис. 17.5

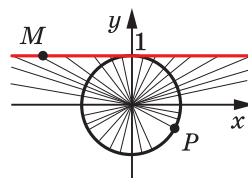


Рис. 17.6

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут α і розміщено так, як показано на рисунку 17.5. Можна показати, що коли пряма OP перетинає пряму $y = 1$, то абсциса точки перетину дорівнює $\operatorname{ctg} \alpha$ (рис. 17.5), тому пряму $y = 1$ називають **віссю котангенсів**.

З рисунка 17.6 зрозуміло, що областю значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина \mathbb{R} .

Якщо точки P_1 , O і P_2 лежать на одній прямій, то прямі OP_1 і OP_2 перетинають вісь тангенсів (котангенсів) в одній і тій самій точці M (рис. 17.7, 17.8). Це означає, що тангенси (котангенси) кутів, які відрізняються на π , 2π , 3π і т. д., рівні. Звідси

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}(\alpha + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

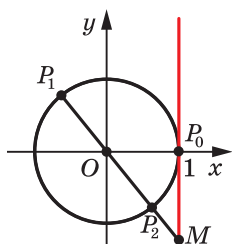


Рис. 17.7

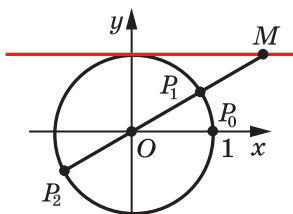


Рис. 17.8

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що $\cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$.

Розв'язання. Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті поворотів точки P_0 на кути α і $\alpha + \frac{\pi}{2}$ відповідно. Опустимо перпендикуляри P_1A і P_2B на осі x і y відповідно (рис. 17.9). Оскільки

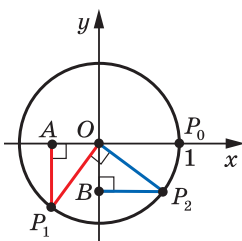


Рис. 17.9

ки $\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$, то можна встановити, що $\triangle OP_1A = \triangle OP_2B$. Звідси $OA = OB$. Отже, абсциса точки P_1 дорівнює ординаті точки P_2 , тобто $\cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$.

Випадки розміщення точок P_1 і P_2 в інших координатних чвертях можна розглянути аналогічно.

Розгляньте самостійно випадки, коли точки P_1 і P_2 лежать на координатних осях. ◀

ПРИКЛАД 3 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:
1) $1 - 4 \cos \alpha$; 2) $\frac{(2 - \sin \alpha) \cos \alpha}{\cos \alpha}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, то $-4 \leq -4 \cos \alpha \leq 4$. Звідси $-3 \leq 1 - 4 \cos \alpha \leq 5$. Отже, найменше значення даного виразу дорівнює -3 ; вираз набуває його при $\cos \alpha = 1$. Найбільше значення дорівнює 5 ; вираз набуває його при $\cos \alpha = -1$.

Відповідь: 5 ; -3 .

2) Маємо: $\frac{(2 - \sin \alpha) \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2 - \sin \alpha$. Зрозуміло, що вираз $2 - \sin \alpha$ набуває всіх значень від 1 до 3 . Найменше значення виразу $2 - \sin \alpha$,

яке дорівнює 1, досягається лише при $\sin \alpha = 1$, проте при цьому $\cos \alpha = 0$ і вираз $\frac{(2 - \sin \alpha) \cos \alpha}{\cos \alpha}$ не визначений. Отже, найменшого значення не існує.

Аналогічно вираз $2 - \sin \alpha$ набуває найбільшого значення лише при $\sin \alpha = -1$, проте при цьому також $\cos \alpha = 0$. Отже, і найбільшого значення не існує.

Відповідь: не існують. ◀

ПРИКЛАД 4 Знайдіть область значень виразу: $\frac{1}{3 \sin x - 2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$-1 \leq \sin x \leq 1; \quad -3 \leq 3 \sin x \leq 3; \quad -5 \leq 3 \sin x - 2 \leq 1.$$

При $0 < 3 \sin x - 2 \leq 1$ отримуємо, що $\frac{1}{3 \sin x - 2} \geq 1$, причому рівність досягається при $\sin x = 1$.

При $-5 \leq 3 \sin x - 2 < 0$ маємо: $\frac{1}{3 \sin x - 2} \leq -\frac{1}{5}$, причому рівність досягається при $\sin x = -1$.

Отже, область значень даного виразу — множина

$$\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty). \quad \blacktriangleleft$$



1. Що називають косинусом кута повороту? синусом кута повороту? тангенсом кута повороту? котангенсом кута повороту?
2. Поясніть, що називають тригонометричними функціями кута повороту; числового аргументу.
3. Якою є область визначення функції $y = \sin x$? $y = \cos x$? $y = \operatorname{tg} x$? $y = \operatorname{ctg} x$?
4. Якою є область значень функції $y = \sin x$? $y = \cos x$? $y = \operatorname{tg} x$? $y = \operatorname{ctg} x$?

ВПРАВИ

17.1.^o Обчисліть значення виразу:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sin 0 + \operatorname{tg} \pi - \sin \frac{3\pi}{2}$; | 3) $2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6}$; |
| 2) $5 \cos \pi + 4 \cos \frac{3\pi}{2} + 2 \cos 2\pi$; | 4) $\sin \frac{\pi}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$. |

17.2.° Чому дорівнює значення виразу:

$$1) \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}; \quad 2) 6 \cos 0 + 4 \sin 2\pi + 4 \sin^2 \frac{2\pi}{3}?$$

17.3.° Чи є можливою рівність:

$$1) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}; \quad 2) \cos \alpha = \frac{\pi}{3}; \quad 3) \operatorname{tg} \alpha = -4; \quad 4) \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{26}?$$

17.4.° Чи може дорівнювати числу $\frac{\sqrt{5}}{2}$ значення:


$$1) \sin \alpha; \quad 2) \cos \alpha; \quad 3) \operatorname{tg} \alpha; \quad 4) \operatorname{ctg} \alpha?$$

17.5.° Укажіть найбільше і найменше значення виразу:


$$1) 2 - \sin \alpha; \quad 2) 6 - 2 \cos \alpha; \quad 3) \sin^2 \alpha; \quad 4) 2 \cos^2 \alpha - 3.$$

17.6.° Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

$$1) -5 \cos \alpha; \quad 2) \cos \alpha - 2; \quad 3) 5 + \sin^2 \alpha; \quad 4) 7 - 3 \sin \alpha.$$

 17.7.° Знайдіть усі значення x , при яких виконується рівність:

$$1) \sin x = 1; \quad 2) \sin x = -1.$$

 17.8.° Знайдіть усі значення x , при яких виконується рівність:

$$1) \cos x = 1; \quad 2) \cos x = -1.$$

17.9.° При яких значеннях a можлива рівність:

$$1) \sin x = a^2 + 1; \quad 2) \cos x = a^2 - 1; \quad 3) \cos x = a^2 - 5a + 5?$$

17.10.° При яких значеннях a можлива рівність:

$$1) \sin x = a - 2; \quad 2) \cos x = a^2 + 2; \quad 3) \sin x = 2a - a^2 - 2?$$

17.11.° Порівняйте значення виразів $2 \sin \alpha$ і $\sin^2 \alpha$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

17.12.° Порівняйте значення виразів:

$$1) \cos 10^\circ \text{ і } \cos 10^\circ \cos 20^\circ; \quad 2) \sin 40^\circ \text{ і } \sin^2 40^\circ.$$

17.13.° Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

$$1) \frac{1}{1 + \sin \alpha}; \quad 2) \frac{\cos^3 \alpha}{\cos \alpha}; \quad 3) \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}.$$

17.14.° Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

$$1) \frac{1}{\cos \alpha - 2}; \quad 2) \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad 3) \sin \alpha + \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}.$$

17.15.° Знайдіть область значень виразу:

$$1) \frac{1}{2 + \sin x}; \quad 2) \frac{1}{1 - \cos x}; \quad 3) \frac{2}{4 \sin x - 3}.$$

17.16.° Знайдіть область значень функції:

$$1) y = \frac{2}{3 - \cos x}; \quad 2) y = \frac{1}{\sin x + 1}; \quad 3) y = \frac{1}{1 - 2 \cos x}.$$

17.17.* Доведіть, що $\sin \alpha = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

17.18.* Доведіть, що $\cos \alpha = -\cos(\pi + \alpha)$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

17.19. Порівняйте з нулем координати точки $A(x; y)$, якщо ця точка лежить:

- 1) у I координатній чверті; 3) у III координатній чверті;
2) у II координатній чверті; 4) у IV координатній чверті.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

17.20. Дві бригади, працюючи разом, зорали поле за 8 год. За скільки годин може зорати поле кожна бригада, працюючи самотійно, якщо одній бригаді на це потрібно на 12 год більше, ніж другій?

17.21. Перший насос може заповнити басейн на 24 год швидше, ніж другий. Спочатку ввімкнули другий насос, а через 8 год — перший. Після 20 год спільної роботи двох насосів водою було заповнено $\frac{2}{3}$ басейну. За скільки годин може заповнити басейн кожний насос, працюючи самотійно?



СТАВАЙ ОСТРОГРАДСЬКИМ!

Видатний український математик Михайло Васильович Остроградський народився в селі Пашенівка на Полтавщині. У 1816–1820 рр. він навчався в Харківському університеті, а потім удосконалював математичну освіту, навчаючись у Франції в таких великих учених, як П'єр Симон Лаплас (1749–1827), Симеон Дені Пуассон (1781–1840), Огюстен Луї Коші (1789–1857), Жан Батист Жозеф Фур'є (1768–1830).

Серед величезної наукової спадщини, яку залишив нам Михайло Остроградський, значну роль відіграють роботи,



**Михайло Васильович
Остроградський**
(1801–1862)

пов'язані з дослідженням тригонометричних рядів і коливань. Багато важливих математичних теорем сьогодні носять ім'я Остроградського.

Крім наукових праць, Остроградський написав низку чудових підручників для молоді, зокрема «Програму і конспект тригонометрії». Сам Остроградський надавав питанню викладання тригонометрії такого великого значення, що це стало предметом доповіді в Академії наук.

Науковий авторитет Остроградського був настільки високим, що в ті часи, відправляючи молодь на навчання, говорили: «Ставай Остроградським!» Це побажання актуальне й сьогодні, тому
«Ставай Остроградським!»

18. Знаки значень тригонометричних функцій

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кут α . Якщо точка P належить I координатній чверті, то говорять, що $\alpha \in$ **кутом I чверті**. Аналогічно можна говорити про кути II, III і IV чвертей.

Наприклад, $\frac{\pi}{7}$ і -300° — кути I чверті, $\frac{2\pi}{3}$ і -185° — кути II чверті, $\frac{5\pi}{4}$ і -96° — кути III чверті, 355° і $-\frac{\pi}{8}$ — кути IV чверті.

Кути виду $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, не відносять до жодної чверті.

Точки, розміщені в I чверті, мають додатні абсцису й ординату. Отже, якщо α — кут I чверті, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.

Якщо α — кут II чверті, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.

Якщо α — кут III чверті, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.

Якщо α — кут IV чверті, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

Знаки значень синуса та косинуса схематично показано на рисунку 18.1.

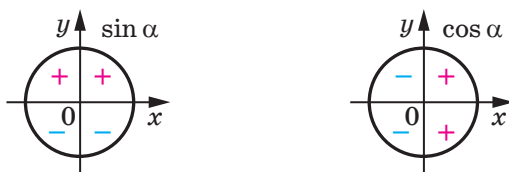


Рис. 18.1

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, то тангенс і котангенс

кутів I і III чвертей є додатними, а кутів II і IV чвертей — від'ємними (рис. 18.2).

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути α і $-\alpha$ відповідно (рис. 18.3).

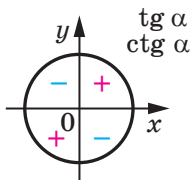


Рис. 18.2

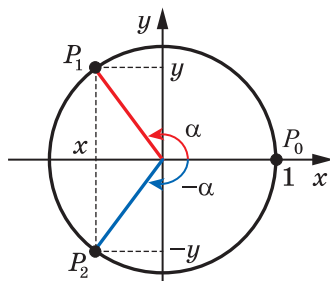


Рис. 18.3

Для будь-якого кута α точки P_1 і P_2 мають рівні абсциси та протилежні ординати. Тоді з означень синуса та косинуса випливає, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \end{aligned}$$

Отримані властивості дають змогу зробити й такі висновки

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

Справді,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

ПРИКЛАД ■ Порівняйте $\sin 200^\circ$ і $\sin(-200^\circ)$.

Розв'язання. Оскільки кут 200° — це кут III чверті, а кут -200° — кут II чверті, то $\sin 200^\circ < 0$, $\sin(-200^\circ) > 0$. Отже, $\sin 200^\circ < \sin(-200^\circ)$. ◀



1. Які знаки мають синус, косинус, тангенс і котангенс у кожній із координатних чвертей?
2. Чому дорівнює $\cos(-\alpha)$? $\sin(-\alpha)$? $\operatorname{tg}(-\alpha)$? $\operatorname{ctg}(-\alpha)$?

ВПРАВИ

18.1.° Додатним чи від'ємним числом є значення тригонометричної функції:

- 1) $\sin(-280^\circ)$; 3) $\sin(-130^\circ)$; 5) $\sin(-3)$; 7) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4}$;
 2) $\cos 340^\circ$; 4) $\cos 2$; 6) $\operatorname{tg} 1$; 8) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$?

18.2.° Який знак має:

- 1) $\sin 186^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 340^\circ$; 5) $\operatorname{ctg}(-291^\circ)$; 7) $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{8}$;
 2) $\operatorname{tg} 104^\circ$; 4) $\cos(-78^\circ)$; 6) $\sin \frac{3\pi}{7}$; 8) $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$?

18.3.° Знайдіть значення виразу:

- 1) $5 \operatorname{tg} 0 + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3 \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;
 2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos(-\pi) + 4 \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

18.4.° Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sin^2(-60^\circ) + \cos^2(-30^\circ)$;
 2) $2 \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

18.5.° Відомо, що $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Порівняйте з нулем значення виразу:

- 1) $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$; 2) $\frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}$; 3) $\sin \alpha - \cos \alpha$.

18.6.° Відомо, що $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Порівняйте з нулем значення виразу:

- 1) $\sin \beta \cos \beta$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^3 \beta}{\sin \beta}$; 3) $\sin \beta + \cos \beta$.

18.7.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:

- 1) $\operatorname{tg} 130^\circ$ і $\operatorname{tg}(-130^\circ)$; 4) $\sin 60^\circ$ і $\sin \frac{8\pi}{7}$;
 2) $\operatorname{tg} 110^\circ$ і $\operatorname{tg} 193^\circ$; 5) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}$ і $\cos 280^\circ$;
 3) $\cos 80^\circ$ і $\sin 330^\circ$; 6) $\operatorname{ctg} 6$ і $\operatorname{ctg} 6^\circ$.

18.8.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:

- 1) $\sin 200^\circ$ і $\sin (-250^\circ)$; 3) $\cos 250^\circ$ і $\cos 290^\circ$;
 2) $\operatorname{ctg} 100^\circ$ і $\operatorname{ctg} 80^\circ$; 4) $\cos 6,2$ і $\sin 5$.

18.9.° Відомо, що α — кут III чверті. Спростіть вираз:

- 1) $\sin \alpha - |\sin \alpha|$; 2) $|\cos \alpha| - \cos \alpha$; 3) $|\operatorname{tg} \alpha| - \operatorname{tg} \alpha$.

18.10.° Відомо, що β — кут IV чверті. Спростіть вираз:

- 1) $|\sin \beta| + \sin \beta$; 2) $\cos \beta - |\cos \beta|$; 3) $|\operatorname{ctg} \beta| - \operatorname{ctg} \beta$.

18.11.° Кутом якої чверті є кут α , якщо:

- 1) $\sin \alpha > 0$ і $\cos \alpha < 0$;
 2) $\sin \alpha < 0$ і $\operatorname{tg} \alpha > 0$;
 3) $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ і $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
 4) $\operatorname{ctg} \alpha + |\operatorname{ctg} \alpha| = 0$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$?

18.12.° Кутом якої чверті є кут α , якщо:

- 1) $\cos \alpha > 0$ і $\operatorname{tg} \alpha > 0$; 3) $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ і $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
 2) $\sin \alpha < 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha < 0$; 4) $|\operatorname{tg} \alpha| - \operatorname{tg} \alpha = 0$ і $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

18.13. При яких значеннях x значення виразів $4x + 5$, $7x - 1$ і $x^2 + 2$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії?

18.14. При яких значеннях x значення виразів $x - 1$, $1 - 2x$ і $x + 7$ будуть послідовними членами геометричної прогресії?

19. Періодичні функції

Багато процесів і подій, які відбуваються в навколишньому світі, повторюються через рівні проміжки часу. Наприклад, через 27,3 доби повторюється значення відстані від Землі до Місяця; якщо сьогодні субота, то через 7 діб знову настане субота.

Подібні явища та процеси називають **періодичними**, а функції, які є їхніми математичними моделями, — **періодичними функціями**.

Ви знаєте, що для будь-якого числа x виконуються рівності

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$

$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Це означає, що значення функцій синус і косинус періодично повторюються зі зміною аргументу на 2π . Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є прикладами періодичних функцій.

Означення. Функцію f називають **періодичною**, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T називають **періодом** функції f .

Виконання рівностей $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення періодичної функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $(x_0 - T) \in D(f)$ і $(x_0 + T) \in D(f)$.

Ви знаєте, що для будь-якого x із області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ виконуються рівності

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Також для будь-якого x із області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ виконуються рівності:

$$\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi).$$

Тоді з означення періодичної функції випливає, що тангенс і котангенс є періодичними з періодом π .

Розглянемо деякі властивості періодичних функцій.

Теорема 19.1. Якщо число T є періодом функції f , то й число $-T$ також є періодом функції f .

Справедливість цієї теореми випливає з означення періодичної функції.

Теорема 19.2. Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функції f , причому $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ також є періодом функції f .

Доведення. Для будь-якого $x \in D(f)$ можна записати:

$$f(x) = f(x + T_1) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + (T_1 + T_2));$$

$$f(x) = f(x - T_1) = f((x - T_1) - T_2) = f(x - (T_1 + T_2)).$$

Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконуються рівності:

$$f(x - (T_1 + T_2)) = f(x) = f(x + (T_1 + T_2)).$$

Отже, число $T_1 + T_2$ є періодом функції f . \blacktriangleleft

Наслідок. Якщо число T є періодом функції f , то будь-яке число виду nT , де $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, також є її періодом.

Доведіть цей факт самостійно.

Остання властивість означає, що кожна періодична функція має безліч періодів.

Наприклад, будь-яке число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$; будь-яке число виду πn , $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$.

Теорема 19.3. Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Доведення. Для будь-якого x із області визначення функції $y = f(kx + b)$ можна записати:

$$f(kx + b) = f((kx + b) + T) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right);$$

$$f(kx + b) = f((kx + b) - T) = f\left(k\left(x - \frac{T}{k}\right) + b\right).$$

Звідси для будь-якого x із області визначення функції $y = f(kx + b)$ виконуються рівності:

$$f\left(k\left(x - \frac{T}{k}\right) + b\right) = f(kx + b) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right).$$

Отже, число $\frac{T}{k}$ є періодом функції $y = f(kx + b)$. ◀

Якщо серед усіх періодів функції існує найменший додатний період, то його називають **головним періодом** функції.

Теорема 19.4. Головним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є число 2π ; головним періодом функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є число π .

Доведення. Проведемо доведення для функції $y = \sin x$ (решту тверджень теореми можна довести аналогічно).

Якщо число T є періодом функції $y = \sin x$, то рівність $\sin(x + T) = \sin x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x , зокрема при $x = -\frac{T}{2}$. Тоді отримуємо:

$$\sin\left(-\frac{T}{2} + T\right) = \sin\left(-\frac{T}{2}\right); \quad \sin \frac{T}{2} = -\sin \frac{T}{2}; \quad \sin \frac{T}{2} = 0.$$

Звідси $\frac{T}{2} = \pi k$, $T = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \sin x$ має вигляд $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Найменшим додатним числом виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є число 2π — період функції $y = \sin x$.

Отже, число 2π — головний період функції $y = \sin x$. ◀

Застосовуючи теореми 19.3 і 19.4 до функцій $y = \sin(kx + b)$ і $y = \cos(kx + b)$, де $k \neq 0$, отримуємо, що число $\frac{2\pi}{k}$ є періодом, а число $\frac{2\pi}{|k|}$ є головним періодом цих функцій.

Головним періодом функцій $y = \operatorname{tg}(kx + b)$ і $y = \operatorname{ctg}(kx + b)$, де $k \neq 0$, є число $\frac{\pi}{|k|}$.

Зазначимо, що не будь-яка періодична функція має головний період. Наприклад, функція $y = c$, де c — деяке число, є періодичною. Очевидно, що будь-яке дійсне число, відмінне від нуля, є її періодом. Отже, ця функція не має головного періоду.

Теорема 19.5. *Якщо T — головний період функції f , то будь-який період функції f має вигляд nT , де $n \in \mathbb{Z}$ і $n \neq 0$.*

Доведення. Нехай T_1 — період, відмінний від указаних. Тоді можна підібрати таке ціле n і таке дійсне $\alpha \in (0; 1)$, що $T_1 = nT + \alpha T$.

Маємо:

$$f(x) = f(x + T_1) = f(x + nT + \alpha T) = f(x + \alpha T),$$

$$f(x) = f(x - T_1) = f(x - nT - \alpha T) = f(x - \alpha T).$$

Отже, αT — період. Проте $0 < \alpha T < T$. Отримали суперечність (оскільки за умовою теореми T — головний період). ◀

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{tg} 135^\circ$.

Розв'язання.

$$1) \sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2) \operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(-45^\circ + 180^\circ) = \operatorname{tg}(-45^\circ) = -1. \quad \blacktriangleleft$$

На рисунку 19.1 зображено графік деякої періодичної функції f з періодом T , $D(f) = \mathbb{R}$.

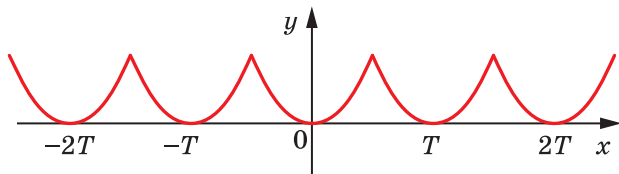


Рис. 19.1

Фрагменти графіка цієї функції на проміжках $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$ і т. д., а також на проміжках $[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$ і т. д. є рівними фігурами, причому будь-яку із цих фігур можна отримати з будь-якої іншої паралельним перенесенням на вектор з координатами $(nT; 0)$, де n — деяке ціле число.

Узагалі, якщо проміжки $[a; b]$ і $[c; d]$ є такими, що $c = a + Tn$, $d = b + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$, то частини графіка функції f на цих проміжках є рівними фігурами (рис. 19.2).

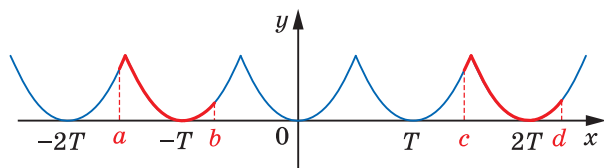


Рис. 19.2

ПРИКЛАД 2 Покажіть, що число $T = \pi$ є періодом функції $f(x) = \sqrt{-\cos^2 x}$.

Розв'язання. Областю визначення функції f є множина значень змінної x , при яких $\cos x = 0$, тобто $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Тоді якщо $x \in D(f)$, то $(x + \pi) \in D(f)$ і $(x - \pi) \in D(f)$.

Оскільки $E(f) = \{0\}$, то $f(x - \pi) = f(x) = f(x + \pi) = 0$. ◀

Означення. Додатні числа a і b називають **сумірними (спільномірними)**, якщо $\frac{a}{b}$ — раціональне число. Якщо $\frac{a}{b}$ — ірраціональне число, то числа a і b є **несумірними**.

Наприклад, числа в парах 3 і 5, $\sqrt{2}$ і $\sqrt{32}$ є сумірними, а числа 1 і $\sqrt{3}$ є несумірними.

Означення. Число T , що є як періодом функції f , так і періодом функції g , називають **спільним періодом** функцій f і g .

Наприклад, число $T = 2\pi$ є спільним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \operatorname{tg} x$.

Теорема 19.6. Якщо існують період T_f функції f і період T_g функції g такі, що числа T_f і T_g є сумірними, то функції f і g мають спільний період.

Доведення. Оскільки періоди T_f і T_g є сумірними, то $\frac{T_f}{T_g} = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Звідси $T_f \cdot n = T_g \cdot m$. Тоді за наслідком з теореми 19.2 число $T = T_f \cdot n = T_g \cdot m$ є періодом як функції f , так і функції g . ◀

Доведення цієї теореми показує, як можна знаходити спільний період двох функцій.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть період функції $y = \cos \frac{6x}{5} + \operatorname{tg} \frac{6x}{7}$.

Розв'язання. Якщо ми знайдемо спільний період функцій $f(x) = \cos \frac{6x}{5}$ і $g(x) = \operatorname{tg} \frac{6x}{7}$, то цим самим знайдемо період даної функції.

Скориставшись теоремою 19.3, запишемо:

$$T_f = 2\pi : \frac{6}{5} = \frac{5\pi}{3}, \quad T_g = \pi : \frac{6}{7} = \frac{7\pi}{6}.$$

Тоді $\frac{T_f}{T_g} = \frac{10}{7}$. Отже, періоди T_f і T_g є сумірними, а тому функції f і g мають спільний період T . Він дорівнює $7T_f$ або $10T_g$, тобто $T = \frac{35\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{35\pi}{3}$. ◀



1. Яку функцію називають періодичною?
2. Що таке період функції?
3. Що називають головним періодом функції?
4. Яке число є головним періодом функції $y = \sin x$? $y = \cos x$? $y = \operatorname{tg} x$? $y = \operatorname{ctg} x$?

ВПРАВИ

19.1.° Знайдіть значення виразу:

- 1) $\operatorname{tg} 780^\circ$; 2) $\cos(-750^\circ)$; 3) $\operatorname{ctg} 225^\circ$; 4) $\sin \frac{23\pi}{4}$; 5) $\cos \frac{7\pi}{4}$.

19.2.° Знайдіть значення виразу:

$$1) \operatorname{tg}(-315^\circ); \quad 2) \sin 1110^\circ; \quad 3) \cos \frac{7\pi}{3}; \quad 4) \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right); \quad 5) \operatorname{ctg}\left(-\frac{10\pi}{3}\right).$$

19.3.° Доведіть, що число T є періодом функції f :

$$1) f(x) = \operatorname{ctg} \pi x, \quad T = 3; \quad 2) f(x) = \sin(5x - 2), \quad T = \frac{4\pi}{5}.$$

19.4.° Доведіть, що числа $\frac{2\pi}{3}$ і -4π є періодами функції $f(x) = \cos 3x$.

19.5.° Знайдіть головний період функції:

$$1) f(x) = \operatorname{tg}(2x + 1); \quad 3) f(x) = \cos \sqrt{3}x;$$

$$2) f(x) = \sin 2\pi x; \quad 4) f(x) = \left\{6x + \frac{5}{8}\right\}.$$

19.6.° Знайдіть головний період функції:

$$1) f(x) = \sin(3x - 1); \quad 2) f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + 4\right); \quad 3) f(x) = \left\{\frac{x}{4} - 2\right\}.$$

19.7.* Доведіть, що число π є періодом функції $y = \sqrt{-\sin^2 x}$.

19.8.* Знайдіть головний період функції: $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}$.

19.9.* Знайдіть головний період функції $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 x}}$.

19.10.* Доведіть, що функція $f(x) = \sin(\sqrt{x})^2$ не є періодичною.

19.11.* Доведіть, що коли функція є зростаючою (спадною), то вона не є періодичною.

19.12.* Знайдіть період функції:

$$1) f(x) = \sin \frac{3x}{2} + \operatorname{tg} 7x; \quad 3) f(x) = \sin \pi x - 2 \cos \frac{\pi x}{3}.$$

$$2) f(x) = \sin 3x + \cos \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{9x}{5};$$

19.13.* Знайдіть період функції:

$$1) f(x) = \cos x + 2 \sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$2) f(x) = \cos \frac{5x}{8} + 5 \operatorname{tg}\left(\frac{7x}{11} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin(6x - 3).$$

19.14.** При яких значеннях параметра a число π є періодом функції

$$f(x) = \frac{\sin x}{a - \cos x}?$$

19.15.** При яких значеннях параметра a число $\frac{\pi}{2}$ є періодом функції

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}?$$

19.16.* Знайдіть усі раціональні значення параметра a , при яких функції $f(x) = \cos \frac{2x}{\sqrt{5+a^2}}$ і $g(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{125-4a+1}}$ мають спільний період.

19.17.* Знайдіть усі раціональні значення параметра a , при яких функції $f(x) = \sin \frac{2ax}{a^2 + \sqrt{12}}$ і $g(x) = \operatorname{tg} \frac{2x}{1-2a + \sqrt{108}}$ мають спільний період.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

19.18. Парною чи непарною є функція:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = \frac{x^3}{25-x^2}; & 3) f(x) = \sqrt[3]{x^2}; & 5) f(x) = \frac{5}{x^4-4x^2}; \\ 2) f(x) = \sqrt[5]{x^3}; & 4) f(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x; & 6) f(x) = \sqrt[4]{|x|}? \end{array}$$

20. Властивості та графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

Періодичність тригонометричних функцій дає змогу досліджувати їхні властивості та будувати графіки за такою схемою.

1) Розглянути проміжок виду $[a; a+T]$, тобто довільний проміжок завдовжки в період T (найчастіше вибирають проміжок $[0; T]$ або проміжок $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$).

2) Дослідити властивості функції на вибраному проміжку.

3) Побудувати графік функції на цьому проміжку.

4) Здійснити паралельне перенесення отриманої фігури на вектори з координатами $(nT; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

↪ Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції.

Під час повороту точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кути від 0 до $\frac{\pi}{2}$ ордината точки одиничного кола збільшується

від 0 до 1 (рис. 20.1). Це означає, що функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Під час повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ ордината точки одиничного кола зменшується від 1 до -1 (рис. 20.1). Отже, функція $y = \sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Під час повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π ордината точки одиничного кола збільшується від -1 до 0 (рис. 20.1).

Таким чином, функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ має три нулі: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Якщо $x \in (0; \pi)$, то $\sin x > 0$; якщо $x \in (\pi; 2\pi)$, то $\sin x < 0$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ досягає найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = \frac{\pi}{2}$ і найменшого значення, яке дорівнює -1 , при $x = \frac{3\pi}{2}$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ набуває всіх значень із проміжку $[-1; 1]$.

Отримані властивості функції $y = \sin x$ дають змогу побудувати її графік на проміжку $[0; 2\pi]$ (рис. 20.2). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких аргументів, наведеної на форзаці 4.

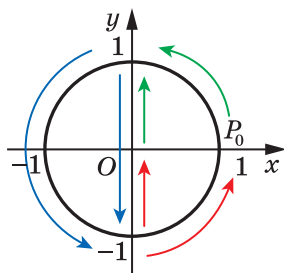


Рис. 20.1

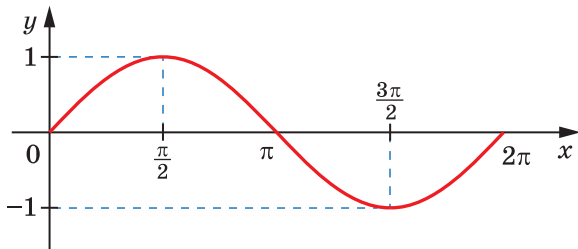


Рис. 20.2

На всій області визначення графік функції $y = \sin x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2n\pi; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 20.3).

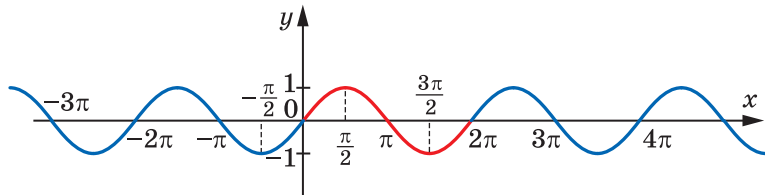


Рис. 20.3

Графік функції $y = \sin x$ називають **синусоїдою**.

У п. 18 було встановлено, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. Це означає, що **функція синус є непарною**.

↪ Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції.

Розглядаючи повороти точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат, можна дійти таких висновків.

Функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0; \pi]$ і зростає на проміжку $[\pi; 2\pi]$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ має два нулі: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, то $\cos x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos x < 0$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ досягає найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = 0$ або $x = 2\pi$ і найменшого значення, яке дорівнює -1 , при $x = \pi$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ набуває всіх значень із проміжку $[-1; 1]$.

Графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ зображено на рисунку 20.4.

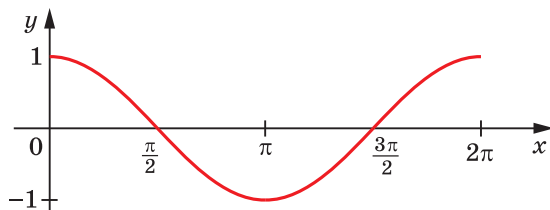


Рис. 20.4

На всій області визначення графік функції $y = \cos x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 20.5).

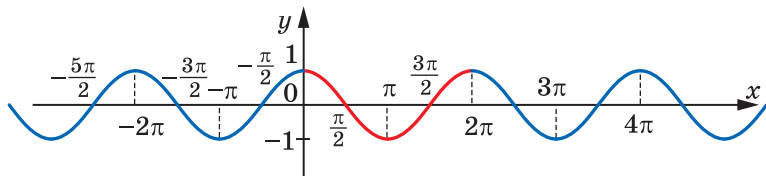


Рис. 20.5

Графік функції $y = \cos x$ називають **косинусоїдою**.

У п. 18 було встановлено, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Це означає, що **функція косинус є парною**.

Якщо скористатися формулою $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (див. приклад 2 п. 17), то стає зрозуміло, що графік функції $y = \cos x$ можна отримати як результат паралельного перенесення графіка функції $y = \sin x$ на вектор з координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (рис. 20.6). Це означає, що графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є рівними фігурами.

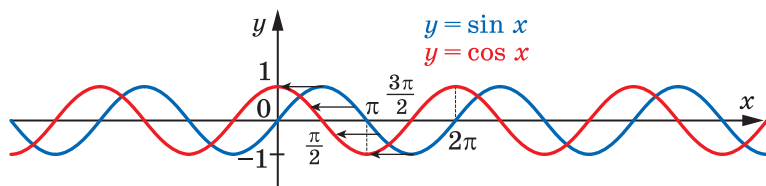


Рис. 20.6

У таблиці наведено основні властивості функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$.

Властивість	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Область визначення	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Область значень	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$

Властивість	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Періодичність	Періодична з головним періодом 2π	Періодична з головним періодом 2π
Нулі функції	Числа виду πn , $n \in \mathbb{Z}$	Числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\sin x > 0$ на кожному з проміжків виду $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\sin x < 0$ на кожному з проміжків виду $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$	$\cos x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\cos x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна	Парна
Зростання / спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$; спадає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$	Зростає на кожному з проміжків виду $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$; спадає на кожному з проміжків виду $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; найменшого значення, яке дорівнює -1 , набуває в точках виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; найменшого значення, яке дорівнює -1 , набуває в точках виду $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

ПРИКЛАД 1 Порівняйте $\sin 40^\circ$ і $\cos 40^\circ$.

Розв'язання

Оскільки $\sin 40^\circ < \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\cos 40^\circ > \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos 40^\circ > \sin 40^\circ$. ◀

ПРИКЛАД 2 Чи можлива рівність $\sin \alpha = 2 \sin 31^\circ$?

Розв'язання

Оскільки $\sin 31^\circ > \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, то $2 \sin 31^\circ > 1$. Отже, дана рівність неможлива. ◀

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y = \sin \left| 2x - \frac{\pi}{3} \right|$.

Розв'язання. Проведемо такі перетворення:

1) $y = \sin x \rightarrow y = \sin |x|$ — симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$;

2) $y = \sin |x| \rightarrow y = \sin |2x|$ — стискання до осі ординат у 2 рази;

3) $y = \sin |2x| \rightarrow y = \sin \left| 2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right|$ — паралельне перенесення

вдovж осі абсцис управо на $\frac{\pi}{6}$ одиниць (рис. 20.7). ◀

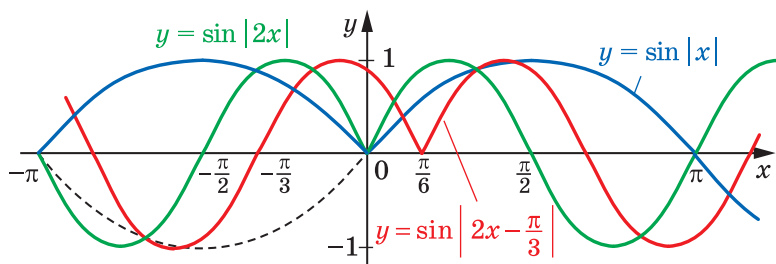


Рис. 20.7

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік рівняння $\cos x + \cos y = 2$.

Розв'язання. Оскільки $|\cos x| \leq 1$ і $|\cos y| \leq 1$, то дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos y = 1. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ y = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

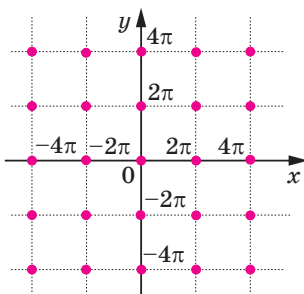


Рис. 20.8

Шуканий графік — це множина точок, зображених на рисунку 20.8. ◀



1. Назвіть властивості функції $y = \sin x$; $y = \cos x$.
2. Як називають графік функції $y = \sin x$? $y = \cos x$?
3. Чому графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є рівними фігурами?

ВПРАВИ

20.1.° На яких із наведених проміжків функція $y = \sin x$ зростає:

- 1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

20.2.° Які з наведених проміжків є проміжками спадання функції $y = \cos x$:

- 1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi; 7\pi]$?

20.3.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:

- 1) $\sin 20^\circ$ і $\sin 21^\circ$; 4) $\cos \frac{10\pi}{9}$ і $\cos \frac{25\pi}{18}$;
 2) $\cos 20^\circ$ і $\cos 21^\circ$; 5) $\cos 5,1$ і $\cos 5$;
 3) $\sin \frac{10\pi}{9}$ і $\sin \frac{25\pi}{18}$; 6) $\sin 2$ і $\sin 2,1$.

20.4.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:

- 1) $\cos \frac{\pi}{9}$ і $\cos \frac{4\pi}{9}$; 3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{30}\right)$ і $\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$;
 2) $\sin \frac{5\pi}{9}$ і $\sin \frac{17\pi}{18}$; 4) $\cos \frac{10\pi}{7}$ і $\cos \frac{11\pi}{9}$.

20.5.* Дослідіть на парність функцію:

$$1) f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}; \quad 2) f(x) = \frac{(x-1) \cos x}{x-1}.$$

20.6.* Дослідіть на парність функцію:

$$1) f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - 1}; \quad 2) f(x) = (\sqrt{x})^2 \sin x.$$

20.7.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sin \left| x + \frac{\pi}{4} \right|; \quad 2) y = 2 \cos \left| x - \frac{\pi}{3} \right|.$$

20.8.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = 2 \sin \left| x + \frac{\pi}{6} \right|; \quad 2) y = -\cos \left| x - \frac{\pi}{4} \right|.$$

20.9.* Побудуйте графік функції $y = \sin \left(\left| x \right| - \frac{\pi}{4} \right)$.

20.10.* Побудуйте графік функції $y = 2 \cos \left(\left| x \right| - \frac{\pi}{3} \right) - 1$.

20.11.* Побудуйте графік функції $y = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - 1$.

20.12.* Побудуйте графік функції $y = -3 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + 2$.

20.13.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = 2 \cos |3x + 2|; \quad 2) y = -2 \sin \left(\frac{1}{2} |x| - 1 \right).$$

20.14.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = 3 \sin |2x - 1|; \quad 2) y = \frac{1}{2} \cos \left(2|x| + \frac{\pi}{3} \right).$$

20.15.** Чи є можливою рівність:

$$1) \cos \alpha = 2 \sin 25^\circ; \quad 2) \sin \alpha = \sqrt{2} \cos 35^\circ?$$

20.16.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \left| \sin \left| \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \right| \right|; \quad 2) y = \left| \cos \left| 2x - \frac{\pi}{3} \right| \right|.$$

20.17.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \left| \cos \left(2|x| - \frac{\pi}{3} \right) \right|; \quad 2) y = \left| \sin \left(\frac{1}{2}|x| + \frac{\pi}{6} \right) \right|.$$

20.18.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = (\sqrt{\sin x})^2; \quad 2) y = \cos x + \sqrt{\cos^2 x}; \quad 3) y = \sqrt{-\sin^2 x};$$

$$4) y = \frac{\sin |x|}{\sin x}; \quad 5) y = \frac{\sin x}{|\sin x|}; \quad 6) y = \operatorname{tg} x |\cos x|.$$

20.19.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = (\sqrt{\cos x})^2; \quad 3) y = \sqrt{\sin x - 1}; \quad 5) y = \operatorname{ctg} x |\sin x|;$$

$$2) y = \sin x - \sqrt{\sin^2 x}; \quad 4) y = \frac{|\cos x|}{\cos x}; \quad 6) y = \frac{\sin |x|}{|\sin x|}.$$

20.20.** Побудуйте графік рівняння:

$$1) \sin \pi (x^2 + y^2) = 0; \quad 2) \sin x + \sin y = 2.$$

20.21.** Побудуйте графік рівняння:

$$1) \cos \pi (x^2 + y^2) = 1; \quad 2) \cos x + \cos y = -2.$$

20.22.* Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння

$$\cos \sqrt{a^2 - x^2} = 1 \text{ має рівно 8 коренів.}$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

20.23. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2 - 10}{x} \geq 3; \quad 2) \frac{x^2 + x}{x - 2} \geq \frac{6}{x - 2}; \quad 3) \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 - x - 3} > 0.$$

20.24. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}}; \quad 2) \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

21. Властивості та графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції (нагадаємо, що функція $y = \operatorname{tg} x$ у точках $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ не визначена).

З рисунка 21.1 видно, що зі зміною кута повороту x від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ значення тангенса збільшуються. Це означає, що функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

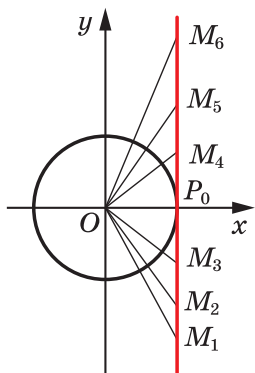


Рис. 21.1

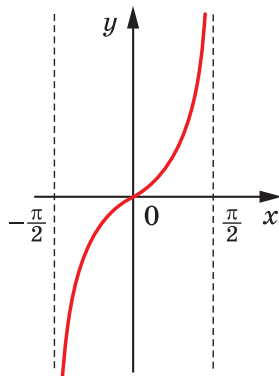


Рис. 21.2

Також з рисунка 21.1 видно, що функція $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ набуває всіх значень із проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Функція $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має один нуль: $x = 0$.

Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\operatorname{tg} x < 0$; якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg} x > 0$.

Отримані властивості функції $y = \operatorname{tg} x$ дають змогу побудувати її графік на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 21.2). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких кутів, наведеної на форзаці 4.

На всій області визначення графік функції $y = \operatorname{tg} x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(n\pi; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 21.3).

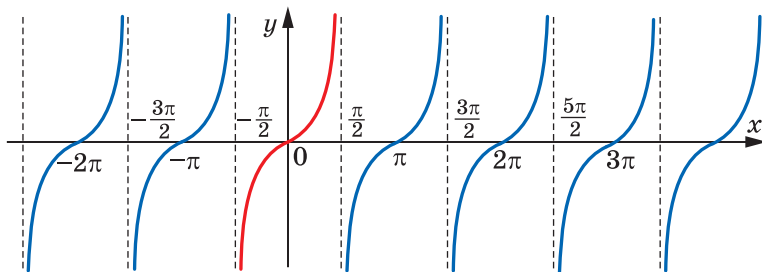


Рис. 21.3

↪ Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$, тобто на проміжку завдовжки в період (нагадаємо, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ не визначена в точках 0 і π).

З рисунка 21.4 видно, що зі зміною кута повороту x від 0 до π значення котангенса зменшуються. Це означає, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає на проміжку $(0; \pi)$.

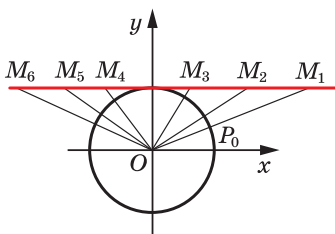


Рис. 21.4

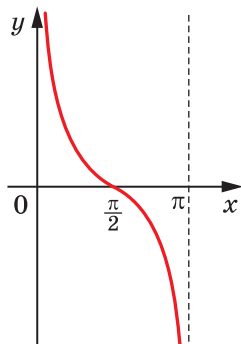


Рис. 21.5

Також з рисунка 21.4 видно, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ набуває всіх значень із проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ має один нуль: $x = \frac{\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{ctg} x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\operatorname{ctg} x < 0$.

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ зображено на рисунку 21.5.

На всій області визначення графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(n\pi; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 21.6).

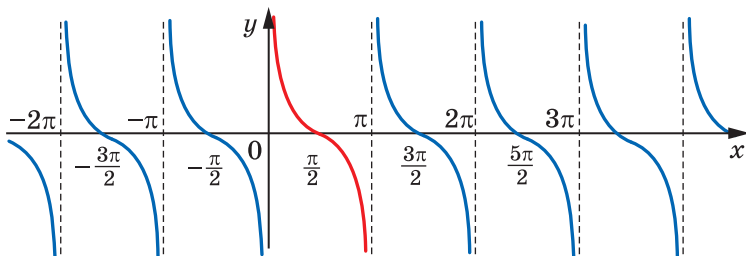


Рис. 21.6

Області визначення кожної з функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є симетричними відносно початку координат (перевірте це самостійно). Крім того, у п. 18 було доведено рівності:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Отже, *функції тангенс і котангенс — непарні.*

У таблиці наведено основні властивості функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$.

Властивість	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область визначення	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$
Область значень	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Періодичність	Періодична з головним періодом π	Періодична з головним періодом π
Нулі функції	Числа виду $\pi n, n \in \mathbb{Z}$	Числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\operatorname{tg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ $\operatorname{tg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\operatorname{ctg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ $\operatorname{ctg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна	Непарна
Зростання / спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	Спадає на кожному з проміжків виду $(\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого і найменшого значень не набуває	Найбільшого і найменшого значень не набуває

Означення. Функцію f називають **обмеженою**, якщо існує число M таке, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$.

Зрозуміло, що функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є обмеженими, а функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ не є обмеженими.

ПРИКЛАД Побудуйте графік функції $y = |\operatorname{ctg} x| \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є всі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, тобто

$$D(y) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Якщо $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg} x > 0$ і $y = 1$.

Якщо $\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg} x < 0$ і $y = -1$.

Шуканий графік складається з окремих відрізків з «виколотими» кінцями (рис. 21.7). ◀

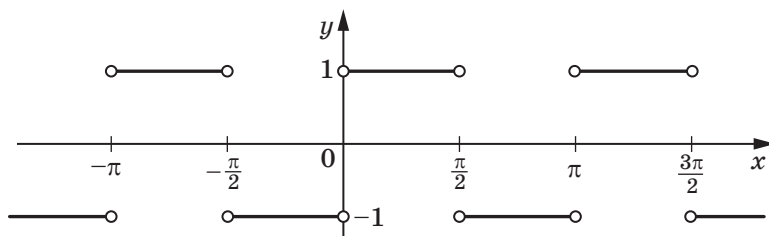


Рис. 21.7



Сформулюйте властивості функції $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$.

ВПРАВИ

21.1.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:

- | | |
|--|--|
| 1) $\operatorname{tg} (-38^\circ)$ і $\operatorname{tg} (-42^\circ)$; | 4) $\operatorname{tg} 1$ і $\operatorname{tg} 1,5$; |
| 2) $\operatorname{tg} 130^\circ$ і $\operatorname{tg} 150^\circ$; | 5) $\operatorname{ctg} (-40^\circ)$ і $\operatorname{ctg} (-60^\circ)$; |
| 3) $\operatorname{tg} 0,9\pi$ і $\operatorname{tg} 1,2\pi$; | 6) $\operatorname{ctg} 2$ і $\operatorname{ctg} 3$. |

21.2.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:

- 1) $\operatorname{tg} 100^\circ$ і $\operatorname{tg} 92^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8}$ і $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12}$;
 2) $\operatorname{ctg} 100^\circ$ і $\operatorname{ctg} 92^\circ$; 5) $\operatorname{tg} (-1)$ і $\operatorname{tg} (-1,2)$;
 3) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$ і $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{18}$; 6) $\operatorname{ctg} (-3)$ і $\operatorname{ctg} (-3,1)$.

21.3.° Дослідіть на парність функцію $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$.

21.4.° Дослідіть на парність функцію $f(x) = \frac{\cos x + \operatorname{ctg} x}{\cos x - \operatorname{ctg} x}$.

21.5.° Побудуйте графік функції:

- 1) $y = -\operatorname{tg} x$; 2) $y = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$; 3) $y = \operatorname{tg} 3x$.

21.6.° Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \operatorname{ctg} x - 1$; 2) $y = \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$; 3) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

21.7.* Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1$; 2) $y = \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$.

21.8.* Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 2 \operatorname{tg} \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1}{2}$; 2) $y = \operatorname{ctg} \left(3x - \frac{\pi}{12} \right)$.

21.9.** Чи є можливою рівність:

- 1) $\sin \alpha = \frac{2}{3} \operatorname{tg} 80^\circ$; 2) $\cos \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{18}$?

21.10.** Побудуйте графік функції:

- 1) $y = (\sqrt{\operatorname{ctg} x})^2$; 3) $y = \sqrt{-\operatorname{tg}^2 x}$; 5) $y = \operatorname{ctg} x - \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$;
 2) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} |x|$; 4) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{|\operatorname{ctg} x|}$; 6) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x}$.

21.11.** Побудуйте графік функції:

- 1) $y = (\sqrt{\operatorname{tg} x})^2$; 3) $y = \sqrt{-\operatorname{ctg}^2 x}$; 5) $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$;
 2) $y = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} |x|$; 4) $y = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$; 6) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

21.12.** Побудуйте графік рівняння:

- 1) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0$; 2) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 0$.

21.13.** Побудуйте графік рівняння:

$$1) \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 0; \quad 2) \operatorname{tg} \pi(x - y) = 1.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

21.14. Доведіть, що функція:

$$1) y = \frac{7}{x+5} \text{ спадає на проміжку } (-5; +\infty);$$

$$2) y = 6x - x^2 \text{ зростає на проміжку } (-\infty; 3].$$

21.15. Знайдіть значення виразу:

$$1) \left(\frac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} \right)^{-\frac{3}{2}} \text{ при } a = 0,008; \quad 2) \left(\frac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{4}} \text{ при } a = 0,0625.$$

22. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

У цьому пункті встановимо тотожності, які пов'язують значення тригонометричних функцій одного й того самого аргументу.

Координати будь-якої точки $P(x; y)$ одиничного кола задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Оскільки $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, де α — кут повороту, у результаті якого з точки $P_0(1; 0)$ було отримано точку P , то

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

Звернемо увагу на те, що точку P вибрано довільно, тому тотожність (1) справедлива для будь-якого α . Її називають **основною тригонометричною тотожністю**.

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, знайдемо залежності між тангенсом і косинусом, а також між котангенсом і синусом.

Припустивши, що $\cos \alpha \neq 0$, поділимо обидві частини рівності (1) на $\cos^2 \alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Звідси

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Ця тотожність є правильною для всіх α , при яких $\cos \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Припустивши, що $\sin \alpha \neq 0$, поділимо обидві частини рівності (1) на $\sin^2 \alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Звідси

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Це тотожність є правильною для всіх α , при яких $\sin \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Зв'язок між тангенсом і котангенсом можна встановити за допомогою рівностей $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Звідси

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Це тотожність є правильною для всіх α , при яких $\sin \alpha \neq 0$ і $\cos \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Зазначимо, що ці два обмеження для α можна об'єднати в одне: $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$

і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$

Оскільки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos \alpha < 0$; отже, $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{24}{7}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Спростіть вираз $\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)}$, якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } & \sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)} = \\ & = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \\ & = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \cos \alpha \sin \alpha} = \\ & = \sqrt{\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha|. \end{aligned}$$

Оскільки $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, тому $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$.

Отже, $|\sin \alpha - \cos \alpha| = \cos \alpha - \sin \alpha$.

Відповідь: $\cos \alpha - \sin \alpha$. ◀



1. Яку рівність називають основною тригонометричною тотожністю?
2. Яка тотожність пов'язує тангенс і косинус одного й того самого аргументу? Для яких значень аргументу ця тотожність є правильною?
3. Яка тотожність пов'язує котангенс і синус одного й того самого аргументу? Для яких значень аргументу ця тотожність є правильною?
4. Яка тотожність пов'язує тангенс і котангенс одного й того самого аргументу? Для яких значень аргументу ця тотожність є правильною?

ВПРАВИ

22.1.° Спростіть вираз:

- | | |
|---|---|
| 1) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$; | 5) $\frac{1 - \operatorname{ctg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \gamma}$; |
| 2) $\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$; | 6) $\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$; |
| 3) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$; | 7) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; |
| 4) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$; | 8) $\cos(-\alpha) + \cos \alpha \operatorname{tg}^2(-\alpha)$. |

22.2.° Спростіть вираз:

- | | |
|--|---|
| 1) $(1 + \operatorname{ctg} \beta)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \beta)^2$; | 2) $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2)$; |
|--|---|

$$3) \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} + \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta}; \quad 5) \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 1;$$

$$4) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad 6) \operatorname{tg}(-\alpha) \operatorname{ctg} \alpha + \sin^2(-\alpha).$$

22.3.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α , якщо:

$$1) \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad 3) \operatorname{tg} \alpha = 2 \text{ і } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$

$$2) \sin \alpha = 0,6 \text{ і } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \quad 4) \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3} \text{ і } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

22.4.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α , якщо:

$$1) \cos \alpha = \frac{12}{13} \text{ і } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad 3) \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3} \text{ і } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$$

$$2) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ і } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \quad 4) \operatorname{ctg} \alpha = -7 \text{ і } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

22.5.* Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha; \quad 3) \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$2) \frac{\sqrt{3} - 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 1} = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \sqrt{3}}; \quad 4) \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

22.6.* Доведіть тотожність:

$$1) \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$2) (\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1.$$

22.7.* Доведіть тотожність:

$$1) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$2) \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1.$$

22.8.* Доведіть тотожність $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) = -1$.

22.9.* Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}, \text{ якщо } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3};$$

$$2) \frac{2 \cos^2 \alpha - 7 \sin^2 \alpha}{3 \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha}, \text{ якщо } \operatorname{ctg} \alpha = -2;$$

$$3) \frac{8 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 5 \sin^2 \alpha \cos \alpha - 8 \cos^3 \alpha}, \text{ якщо } \operatorname{tg} \alpha = -3.$$

22.10.* Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5 \cos \alpha + 6 \sin \alpha}{3 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$;

2) $\frac{2 \sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha}{5 \sin \alpha - \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -4$.

22.11.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta) + \sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta)}$, якщо $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha}$, якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

3) $\sqrt{2 - 2 \cos^2 \beta} + \sqrt{2 \sin^2 \beta - 2\sqrt{2} \sin \beta + 1}$, якщо $\frac{3\pi}{4} \leq \beta \leq \pi$.

22.12.** Спростіть вираз:

1) $\sin \alpha - \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$, якщо $180^\circ < \alpha < 360^\circ$;

2) $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$, якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\sqrt{4 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha + 1} - \sqrt{4 - 4 \sin^2 \alpha}$, якщо $\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \pi$.

22.13.** Дано: $\sin \alpha + \cos \alpha = b$. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin \alpha \cos \alpha$; 2) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$; 3) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$.

22.14.** Дано: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = b$. Знайдіть значення виразу:

1) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$; 3) $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2$.

22.15.** Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $2 \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha$; 3) $1 - \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha}$;

2) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$; 4) $3 \cos^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

22.16.** Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3 \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha$; 3) $2 \sin^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

2) $1 + \sqrt{\sin^2 \alpha} + 2 \cos^2 \alpha$;

22.17.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin^2 \sqrt{1 - x^2} + \cos^2 \sqrt{1 - x^2}$; 2) $y = \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$.

22.18.** Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{\sin^2 x} - \operatorname{ctg}^2 x$.

22.19.* Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = \sin^{14} x + \cos^{14} x$.

22.20.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції
 $f(x) = \sin^{10} x + \cos^{13} x$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

22.21. Знайдіть нулі функції:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1};$$

$$3) f(x) = x \sqrt{x-1};$$

$$2) f(x) = \sqrt{x^2 + 9};$$

$$4) f(x) = \sqrt{|x| - 2}.$$

22.22. Обчисліть значення виразу:

$$1) \left(\frac{5^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \cdot 10} \right)^4;$$

$$2) \left(\frac{7^{\frac{9}{4}} \cdot 3^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}}} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

23. Формули додавання

Формулами додавання називають формули, які виражають $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ через тригонометричні функції кутів α і β .

Доведемо, що

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути α і β відповідно.

Розглянемо випадок, коли $0 \leq \alpha - \beta \leq \pi$. Тоді кут між векторами $\overline{OP_1}$ і $\overline{OP_2}$ дорівнює $\alpha - \beta$ (рис. 23.1). Координати точок P_1 і P_2 дорівнюють відповідно $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ і $(\cos \beta; \sin \beta)$. Отже, вектор $\overline{OP_1}$ має координати $(\cos \alpha; \sin \alpha)$, а вектор $\overline{OP_2}$ — $(\cos \beta; \sin \beta)$.

Виразимо скалярний добуток векторів $\overline{OP_1}$ і $\overline{OP_2}$ через їхні координати:

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Водночас за означенням скалярного добутку векторів можна записати:

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2} = |\overline{OP_1}| \cdot |\overline{OP_2}| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

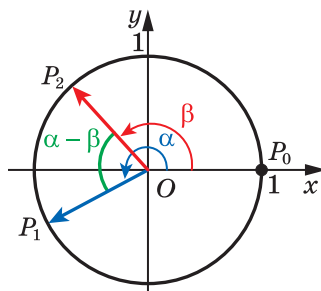


Рис. 23.1

Звідси отримуємо формулу, яку називають **косинусом різниці**:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

Покажемо, що доведення не зміниться при будь-якому виборі кутів α і β , зокрема, коли $(\alpha - \beta) \notin [0; \pi]$.

Кути поворотів α і β для точок P_1 і P_2 відповідно можна подати в такому вигляді:

$$\alpha = \alpha_1 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_1 \in [0; 2\pi];$$

$$\beta = \beta_1 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \beta_1 \in [0; 2\pi].$$

Тоді кут між векторами $\overline{OP_1}$ і $\overline{OP_2}$ набуває одного із чотирьох значень: $\alpha_1 - \beta_1$ (рис. 23.2); $\beta_1 - \alpha_1$ (рис. 23.3); $2\pi - (\alpha_1 - \beta_1)$ (рис. 23.4); $2\pi - (\beta_1 - \alpha_1)$ (рис. 23.5).

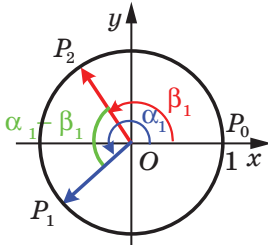


Рис. 23.2

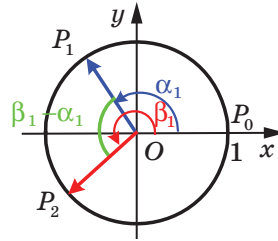


Рис. 23.3

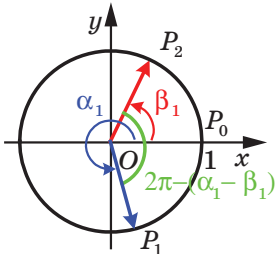


Рис. 23.4

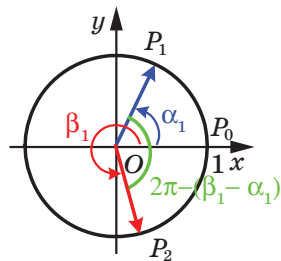


Рис. 23.5

У кожному із чотирьох випадків косинус кута між векторами $\overline{OP_1}$ і $\overline{OP_2}$ дорівнює $\cos(\alpha - \beta)$. Далі залишається тільки повторити наведені вище міркування для випадку, коли $(\alpha - \beta) \in [0; \pi]$.

Доведемо формулу **косинуса суми**:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Маємо: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Доведемо формули **синуса суми й синуса різниці**:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

За допомогою формули (1) доведемо, що

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\text{Справді, } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = \sin \alpha.$$

Тепер доведемо, що

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\text{Маємо: } \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Формули **тангенса суми й тангенса різниці** мають вигляд:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (3)$$

Доведемо формулу (2). Маємо:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Припустивши, що $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$, отриманий дріб можна переписати так:

$$\frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Формулу тангенса різниці (3) доведіть самостійно.

Тотожність (2) справедлива для всіх α і β , при яких $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$.

Тотожність (3) справедлива для всіх α і β , при яких $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$.

Розв'язання. Подамо даний вираз у вигляді синуса суми. Для цього помножимо та поділимо даний вираз на 2:

$$\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right).$$

Ураховуючи, що $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$, отримуємо:

$$\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = 2(\sin 30^\circ \cos \alpha + \cos 30^\circ \sin \alpha) = 2 \sin(30^\circ + \alpha).$$

Отже, найбільше значення даного виразу дорівнює 2 (вираз набуває його при $\sin(30^\circ + \alpha) = 1$), найменше значення дорівнює -2 (вираз набуває його при $\sin(30^\circ + \alpha) = -1$). \blacktriangleleft



Які формули називають формулами додавання? Запишіть їх.

ВПРАВИ

23.1.° Спростіть вираз:

- 1) $\sin \alpha \cos 4\alpha + \cos \alpha \sin 4\alpha$;
- 2) $\cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$;
- 3) $\sin \alpha \sin(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta)$;
- 4) $\sin 53^\circ \cos 7^\circ - \cos 53^\circ \sin(-7^\circ)$;
- 5) $\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta$.

23.2.° Спростіть вираз:

- 1) $\cos 6\alpha \cos 2\alpha - \sin 6\alpha \sin 2\alpha$;
- 2) $\sin(-15^\circ) \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 75^\circ$;
- 3) $\frac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ + \sin 64^\circ \sin 4^\circ}{\sin 19^\circ \cos 41^\circ + \sin 41^\circ \cos 19^\circ}$;
- 4) $\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta$.

23.3.° Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 46^\circ}$;
- 2) $\frac{1 - \operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 33^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}$.

23.4.° Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\operatorname{tg} 24^\circ + \operatorname{tg} 36^\circ}{1 - \operatorname{tg} 24^\circ \operatorname{tg} 36^\circ}$;
- 2) $\frac{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 5\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$.

23.5.° Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$;
- 2) $\frac{\sin \alpha + 2 \sin(60^\circ - \alpha)}{2 \cos(30^\circ - \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha$.

23.6.° Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta) + \sin \beta \cos \alpha} = 1$;
- 2) $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \sin(45^\circ - \alpha)}{2 \sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \sqrt{2}$.

23.7.° Дано: $\sin \alpha = \frac{9}{41}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть $\sin(\alpha + 45^\circ)$.

23.8.° Дано: $\cos \alpha = -0,6$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Знайдіть $\cos(60^\circ - \alpha)$.

23.9.° Знайдіть $\cos(\alpha + \beta)$, якщо $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ і $\cos \beta = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

23.10.° Знайдіть $\sin(\alpha - \beta)$, якщо $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ і $\cos \beta = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

23.11.° Дано: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{3}{5}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

23.12.° Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$. Знайдіть $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$.

23.13.° Доведіть тотожність:

- 1) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;
- 2) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$.

23.14.° Доведіть тотожність $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$.

23.15.° Спростіть вираз:

$$1) \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{2}; \quad 2) \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha}.$$

23.16.° Спростіть вираз:

$$1) \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha; \quad 2) \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

23.17.° Користуючись формулами додавання, знайдіть:

$$1) \sin 15^\circ; \quad 2) \sin 105^\circ; \quad 3) \operatorname{ctg} 105^\circ.$$

23.18.° Користуючись формулами додавання, знайдіть:

$$1) \cos 75^\circ; \quad 2) \sin 75^\circ.$$

23.19.° Спростіть вираз:

$$1) \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ;$$

$$2) \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 25^\circ.$$

23.20.° Спростіть вираз:

$$1) \operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ - \sqrt{3} \operatorname{tg} 80^\circ \operatorname{tg} 20^\circ;$$

$$2) \operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ \operatorname{tg} 10^\circ.$$

23.21.° Доведіть тотожність:

$$1) \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta;$$

$$2) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta);$$

$$3) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{2}{\cos^2 \alpha}.$$

23.22.° Доведіть тотожність:

$$1) \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta;$$

$$2) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 0.$$

23.23.° Знайдіть найбільше значення виразу:

$$1) \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha; \quad 3) \sin \alpha + \cos \alpha;$$

$$2) 4 \sin \alpha + 5 \cos \alpha; \quad 4) 2 \sin \alpha - \cos \alpha.$$

23.24.° Знайдіть найбільше значення виразу:

$$1) \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha; \quad 3) 3 \sin \alpha + \cos \alpha.$$

$$2) \sqrt{5} \cos \alpha - 2\sqrt{5} \sin \alpha;$$

23.25.° Дано: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = -\frac{2}{5}$, $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{4\pi}{3}$. Знайдіть $\sin \alpha$.

23.26.° Дано: $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть $\sin \alpha$.

23.27.* Дано: $\cos(5^\circ + \alpha) = 0,6$, $0^\circ < \alpha < 55^\circ$. Знайдіть $\operatorname{tg}(35^\circ + \alpha)$.

23.28.* Дано: $\sin(40^\circ + \alpha) = b$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Знайдіть $\cos(70^\circ + \alpha)$.

23.29.* Дано: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\alpha - \beta$.

23.30.* Дано: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Знайдіть $\alpha + \beta$.

23.31.* Дано: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin \beta = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Знайдіть $\alpha + \beta$.

23.32.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}; \quad 2) y = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x}.$$

23.33.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x}; \quad 2) y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}.$$

23.34.** Доведіть, що коли α , β , γ — кути непрямокутного трикутника, то $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$.

23.35.** Доведіть, що коли α , β , γ — кути трикутника, то

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1.$$

23.36.** Доведіть нерівність $\sin(\alpha + \beta) < \cos \alpha + \cos \beta$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

23.37.** Доведіть нерівність $\cos(\alpha - \beta) < \cos \alpha + \sin \beta$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

23.38.* Доведіть нерівність $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$, де α , β , γ — кути трикутника.

23.39.* Доведіть нерівність $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$, де α, β, γ — кути трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

23.40. Спростіть вираз

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt[3]{\frac{a-b}{a+b}} - 2 \right) : \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a-b}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a+b}} \right).$$

23.41. Номери квартир під'їзду будинку є послідовними числами від 41 до 80. Яка ймовірність того, що номер навмання вибраної квартири є числом:

- 1) парним;
- 2) кратним 5;
- 3) цифри якого однакові?

24. Формули зведення

Періодичність тригонометричних функцій дає змогу зводити обчислення значень синуса та косинуса до випадку, коли значення аргументу належить проміжку $[0; 2\pi]$, а обчислення значень тангенса та котангенса — до випадку, коли значення аргументу належить проміжку $[0; \pi]$. У цьому пункті ми розглянемо формули, які дають можливість у таких обчисленнях обмежитися лише кутами від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Кожний кут із проміжку $[0; 2\pi]$ можна подати у вигляді $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$,

або $\pi \pm \alpha$, або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, де $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Наприклад, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$,

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}.$$

Обчислення синусів і косинусів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення синуса або косинуса кута α . Наприклад:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = -\sin \alpha;$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = \sin \alpha.$$

Застосовуючи формули додавання, аналогічно можна отримати:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha & \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\cos \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha & \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cos \alpha \end{aligned}$$

Ці шість формул називають **формулами зведення для синуса**.

Наведені нижче шість формул називають **формулами зведення для косинуса**:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin \alpha \end{aligned}$$

Ці тотожності можна також отримати, застосувавши формули додавання.

Обчислення тангенсів і котангенсів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення тангенса або котангенса кута α . Наприклад:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Аналогічно можна отримати:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Ці формули називають **формулами зведення для тангенса і котангенса**.

Проаналізувавши наведені формули зведення, можна виявити закономірності, завдяки яким необов'язково заучувати ці формули.

Для того щоб записати будь-яку з них, можна керуватися такими правилами.

1. У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина за умови, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Якщо в лівій частині формули кут має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус замінюють на косинус, тангенс — на котангенс і навпаки. Якщо кут має вигляд $\pi \pm \alpha$, то заміни функції не відбувається.

Покажемо, як застосувати ці правила для виразу $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Припустивши, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, доходимо висновку: $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ є кутом

III координатної чверті. Тоді $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$. За першим правилом у правій частині рівності має стояти знак «-».

Оскільки аргумент має вигляд $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, то за другим правилом потрібно замінити синус на косинус.

Отже, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$.

ПРИКЛАД 1 Обчисліть: 1) $\sin 930^\circ$; 2) $\cos(-480^\circ)$.

Розв'язання. 1) $\sin 930^\circ = \sin(360^\circ \cdot 2 + 210^\circ) = \sin 210^\circ =$

$$= \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

2) $\cos(-480^\circ) = \cos 480^\circ = \cos(360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ =$

$$= \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Обчисліть $\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 44^\circ \dots \operatorname{tg} 49^\circ$.

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{ctg} 41^\circ$, $\operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{ctg} 42^\circ$ і т. д. Тоді, об'єднавши попарно множники, які рівновіддалені від кінців добутку, отримаємо чотири добутки, кожний з яких дорівнює 1:

$$\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 47^\circ = \operatorname{tg} 44^\circ \operatorname{tg} 46^\circ = 1.$$

Ще один множник даного добутку, $\operatorname{tg} 45^\circ$, дорівнює 1. Отже,

$$\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 44^\circ \dots \operatorname{tg} 49^\circ = 1. \blacktriangleleft$$



Сформулюйте правила, якими можна керуватися під час застосування формул зведення.

ВПРАВИ

24.1.° Обчисліть значення тригонометричної функції:

$$1) \cos 225^\circ; \quad 2) \sin 240^\circ; \quad 3) \cos \frac{5\pi}{4}; \quad 4) \cos \left(-\frac{4\pi}{3}\right).$$

24.2.° Обчисліть значення тригонометричної функції:

$$1) \operatorname{tg} 210^\circ; \quad 2) \operatorname{ctg} 315^\circ; \quad 3) \cos(-150^\circ); \quad 4) \sin \left(-\frac{5\pi}{3}\right).$$

24.3.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sin(\pi + \alpha) \cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cos(\pi - \alpha)};$$

$$2) \sin(\pi - \beta) \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \cos(\pi - \beta);$$

$$3) \sin^2(\pi - x) + \operatorname{tg}^2(\pi - x) \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(x - 2\pi);$$

$$4) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)\right)^2;$$

$$5) \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)\right)}{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) (\cos(2\pi + \alpha) - \sin(2\pi - \alpha))}.$$

24.4.* Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sin(\pi - \alpha) \sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\cos \alpha;$$

$$2) \frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} = 1;$$

$$3) \sin(2\pi - \varphi) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) - \cos(\varphi - \pi) - \sin(\varphi - \pi) = \sin \varphi;$$

$$4) \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(\pi + \alpha) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -1.$$

24.5.** Обчисліть значення виразу:

- 1) $\operatorname{ctg} 5^\circ \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{ctg} 25^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 75^\circ \operatorname{ctg} 85^\circ$;
- 2) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \dots + \operatorname{tg} 160^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ$;
- 3) $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 359^\circ + \sin 360^\circ$.

24.6.** Обчисліть значення виразу:

- 1) $\sin 110^\circ + \sin 130^\circ + \sin 150^\circ + \dots + \sin 230^\circ + \sin 250^\circ + \sin 270^\circ$;
- 2) $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$;
- 3) $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ + \dots + \operatorname{ctg} 165^\circ$.

24.7.** Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)} + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 1;$$

$$2) \frac{\cos^4(\alpha - \pi)}{\cos^4\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin^4\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - 1} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$3) \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) \sin^{-2}\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) = 2.$$

24.8.** Знайдіть значення виразу $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{11} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{22}$.

24.9.** Спростіть вираз:

$$1) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha);$$

$$2) \frac{\cos^2(20^\circ - \alpha)}{\sin^2(70^\circ + \alpha)} + \operatorname{tg}(\alpha + 10^\circ) \operatorname{ctg}(80^\circ - \alpha).$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

24.10. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{9 + 8x - x^2} = x - 3;$$

$$3) \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-2x} = 2 - 2x;$$

$$2) \sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x};$$

$$4) \frac{5}{\sqrt{3x-2}} + \sqrt{3x-2} = 3\sqrt{3x+1}.$$

24.11. Людина, рухаючись з одного села в друге, спочатку збільшила швидкість на 30 %, а через деякий час зменшила швидкість на 20 %. На скільки відсотків зросла початкова швидкість?

25. Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів

Формули, які виражають тригонометричні функції кута 2α через тригонометричні функції кута α , називають **формулами подвійного аргументу**.

У формулах додавання

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

покладемо $\beta = \alpha$. Отримаємо:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Ці формули називають відповідно **формулами косинуса, синуса й тангенса подвійного аргументу**.

Оскільки $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ і $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, то з формули $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ отримуємо ще дві формули:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Іноколи ці формули зручно використовувати в такому вигляді:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

або в такому вигляді:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Дві останні формули називають **формулами пониження степеня**.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

$$1) \frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}}; \quad 2) 1 - 8 \sin^2 \beta \cos^2 \beta; \quad 3) \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}.$$

Розв'язання. 1) Застосовуючи формулу косинуса подвійного аргументу $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ і формулу різниці квадратів, отримуємо:

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} = - \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$2) 1 - 8 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = 1 - 2 \cdot 4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = 1 - 2 \sin^2 2\beta = \cos 4\beta.$$

3) Оскільки сума аргументів $\frac{\pi}{4} - \alpha$ і $\frac{\pi}{4} + \alpha$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} &= \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \\ &= \frac{\cos 2\alpha}{2 \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \frac{\cos 2\alpha}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}. \end{aligned}$$

Застосовуючи формулу синуса подвійного аргументу до кута $\frac{\pi}{4} - \alpha$, отримуємо:

$$\frac{\cos 2\alpha}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Подайте у вигляді добутку вираз $1 - \sin \alpha$.

Розв'язання. За допомогою формули зведення замінимо синус на косинус і застосуємо формулу $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$:

$$1 - \sin \alpha = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right). \quad \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 3 Доведіть тотожність

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha = \frac{\sin 32\alpha}{32 \sin \alpha}.$$

Розв'язання. Помножимо та поділимо ліву частину даної рівності на $\sin \alpha$ і багаторазово застосуємо формулу синуса подвійного аргументу:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{\sin 4\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{4 \sin \alpha} = \\ &= \frac{\sin 8\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{8 \sin \alpha} = \frac{\sin 16\alpha \cos 16\alpha}{16 \sin \alpha} = \frac{\sin 32\alpha}{32 \sin \alpha}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 3α через тригонометричні функції аргументу α , називають **формулами потрійного аргументу**.

Маємо:

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin (2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

Отже,

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

Цю формулу називають **формулою синуса потрійного аргументу**.

Знайдемо формулу для $\cos 3\alpha$:

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos (2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

Цю формулу називають **формулою косинуса потрійного аргументу**.

ПРИКЛАД 4 Доведіть тотожність

$$4 \cos \alpha \cos (60^\circ - \alpha) \cos (60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha.$$

Розв'язання. Застосувавши формули косинуса різниці та косинуса суми, отримуємо:

$$\begin{aligned} & 4 \cos \alpha \cos (60^\circ - \alpha) \cos (60^\circ + \alpha) = \\ & = 4 \cos \alpha (\cos 60^\circ \cos \alpha + \sin 60^\circ \sin \alpha) (\cos 60^\circ \cos \alpha - \sin 60^\circ \sin \alpha) = \\ & = 4 \cos \alpha (\cos^2 60^\circ \cos^2 \alpha - \sin^2 60^\circ \sin^2 \alpha) = 4 \cos \alpha \left(\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right) = \\ & = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \\ & = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 3 \cos^3 \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 5 Доведіть рівність $16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$.

$$\begin{aligned} & \text{Розв'язання. Маємо: } 16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \\ & = 16 \cdot \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ. \end{aligned}$$

Оскільки $40^\circ = 60^\circ - 20^\circ$, $80^\circ = 60^\circ + 20^\circ$, то можна застосувати тотожність, доведену в прикладі 4 цього пункту (при $\alpha = 20^\circ$):

$$8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2 \cos (3 \cdot 20^\circ) = 1.$$

Інше доведення можна отримати, міркуючи так само, як при розв'язуванні прикладу 3:

$$\begin{aligned} 16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ &= \frac{8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \\ &= \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \\ &= \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin (180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = 1. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Формули, які виражають тригонометричні функції кута $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометричні функції кута α , називають **формулами половинного аргументу**.

Замінивши у формулах пониження степеня α на $\frac{\alpha}{2}$, отримаємо:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2},$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

Поділимо почленно першу рівність на другу. Отримаємо:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Тепер можна записати:

$$\begin{cases} \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \end{cases}$$

Ці формули називають відповідно **формулами синуса, косинуса й тангенса половинного аргументу**.

ПРИКЛАД 6 Знайдіть $\sin 22^\circ 30'$.

Розв'язання. Використовуючи формули половинного аргументу, отримуємо:

$$\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}. \blacktriangleleft$$

За допомогою формул подвійного аргументу можна виразити $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

$$\text{Маємо: } \sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Припустивши, що $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, поділимо чисельник і знаменник отриманого дробу на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Виразимо $\cos \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

$$\text{Отримуємо: } \cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Припустивши, що $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, поділимо чисельник і знаменник отриманого дробу на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$



1. Запишіть формули косинуса, синуса й тангенса подвійного аргументу.
2. Запишіть формули пониження степеня.
3. Які формули називають формулами потрійного аргументу?
4. Запишіть формули синуса, косинуса й тангенса половинного аргументу.

ВПРАВИ

25.1.° Спростіть вираз:

1) $\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$;

2) $\frac{\sin 50^\circ}{2 \cos 25^\circ}$;

3) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha};$

6) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha};$

4) $1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4};$

7) $\cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \sin^4 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right);$

5) $\frac{\sin^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 2\alpha};$

8) $\frac{\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \alpha)}.$

25.2.° Спростіть вираз:

1) $\cos 6\alpha + 2 \sin^2 3\alpha;$

5) $\frac{\sin 4\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha};$

2) $\frac{\cos 70^\circ}{\cos 35^\circ + \sin 35^\circ};$

6) $\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right);$

3) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2};$

7) $\sin^2 (\beta - 45^\circ) - \cos^2 (\beta - 45^\circ);$

4) $\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha);$

8) $\frac{2 \operatorname{tg} 1,5\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 1,5\alpha}.$

25.3.° Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = -0,6$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.**25.4.°** Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.**25.5.°** Знайдіть $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо:

1) $\operatorname{tg} \alpha = 4;$

2) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

25.6.° Знайдіть $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо:

1) $\operatorname{ctg} \alpha = 2;$

2) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$

25.7.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1 - \cos 4\alpha;$ 2) $1 + \cos \frac{\alpha}{3};$ 3) $1 - \cos 50^\circ;$ 4) $1 + \sin 2\alpha.$

25.8.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1 - \cos \frac{5\alpha}{6};$ 2) $1 + \cos 12\alpha;$ 3) $1 + \cos 40^\circ;$ 4) $1 - \sin \frac{\alpha}{2}.$

25.9.° Доведіть тотожність:

1) $2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = 1;$

3) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = 2;$

2) $\operatorname{ctg} 3\alpha (1 - \cos 6\alpha) = \sin 6\alpha;$

4) $\frac{1 - \cos 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha.$

25.10.° Спростіть вираз:

$$1) 2 \sin^2(135^\circ - \alpha) - \sin 2\alpha; \quad 2) \frac{1 + \cos 8\alpha}{\sin 8\alpha}.$$

25.11.° Знайдіть $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 5$.

25.12.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -3$.

25.13.° Дано: $\cos 2\alpha = -0,6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$.

25.14.° Дано: $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

25.15.° Використовуючи формули половинного кута, знайдіть:

$$1) \sin 15^\circ; \quad 3) \operatorname{tg} 75^\circ; \quad 5) \operatorname{tg} 112^\circ 30';$$

$$2) \cos 15^\circ; \quad 4) \cos 75^\circ; \quad 6) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}.$$

25.16.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}};$$

$$4) \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha};$$

$$2) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \sin 2\alpha;$$

$$5) \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)};$$

$$3) \frac{4 \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2};$$

$$6) 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

25.17.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{2 \cos 2\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha};$$

$$3) \frac{\cos 2\alpha + 1 - \cos^2 \alpha}{\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right)}.$$

$$2) \left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \sin 2\alpha;$$

25.18.° Доведіть тотожність:

$$1) 1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4 \cos^2 \alpha \cos 2\alpha;$$

$$2) \frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$3) \frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4}{1 - 8 \sin^2 \alpha - \cos 4\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^4 \alpha;$$

$$4) \frac{\cos \left(4\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha \right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$5) \frac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \sin 4\alpha;$$

$$6) \frac{2 \cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \alpha).$$

25.19.* Доведіть тотожність:

$$1) \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 4\alpha\right) = -\sin 8\alpha;$$

$$2) 1 - 2 \cos 3\alpha + \cos 6\alpha = -4 \sin^2 \frac{3\alpha}{2} \cos 3\alpha;$$

$$3) \frac{\sin^2\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)} = -\frac{1}{4} \sin 8\alpha;$$

$$4) \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

25.20.* Доведіть, що $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$.

25.21.* Доведіть, що $\operatorname{tg} 75^\circ - \operatorname{ctg} 75^\circ = 2\sqrt{3}$.

25.22.* Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 3; \quad 2) \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

25.23.* Доведіть тотожність $\frac{\sin 3\alpha + 4 \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - 4 \cos^3 \alpha} = \frac{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha}{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha}$.

25.24.* Дано: $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $135^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть $\sin \alpha$.

25.25.* Дано: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ$. Знайдіть $\cos \frac{\alpha}{2}$.

25.26.* Дано: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 6$. Знайдіть $\sin \alpha - \cos \alpha$.

25.27.* Обчисліть $2 - 13 \cos 2\alpha + \frac{1}{\sin 2\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{5}$.

25.28.* Обчисліть $1 + 5 \sin 2\alpha - \frac{3}{\cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

25.29.* Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$.

25.30.* Знайдіть $\sin \alpha$, якщо $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$.

25.31.* Спростіть вираз:

1) $\cos^4 \alpha - 6 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha$;

2) $\frac{2 \sin 4\alpha (1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{1 + \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right)}$;

3) $\frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha}$;

4) $\frac{2 \sin^2 4\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha \right) \cos^2 \left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha \right)}$.

25.32.* Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha)}$;

2) $\frac{\sin^2 (\alpha - \pi) - 4 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos^2 \left(\alpha - \frac{5\pi}{2} \right) - 4 + 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)}$;

3) $\frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{\sin 3\alpha \cos \alpha - \cos 3\alpha \sin \alpha}$;

4) $\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha \right) \sin^2 \left(\frac{5\pi}{4} + 4\alpha \right)}{1 - 2 \cos^2 4\alpha}$.

25.33.** Доведіть, що:

1) $\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{1}{4}$;

3) $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$;

2) $8 \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = 1$;

4) $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ = \frac{1}{16}$.

25.34.** Доведіть, що:

1) $\sin 54^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$;

3) $\cos 3\alpha \cos 6\alpha \cos 12\alpha = \frac{\sin 24\alpha}{8 \sin 3\alpha}$.

2) $8 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -1$;

25.35.** Виразіть через $\cos 4\alpha$:

1) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$;

2) $\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha$.

25.36.** Обчисліть $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{24}$.

25.37.** Доведіть тотожність:

- 1) $3 + 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 8 \cos^4 2\alpha$;
- 2) $\frac{\cos^2(4\alpha - 3\pi) - 4 \cos^2(2\alpha - \pi) + 3}{\cos^2(4\alpha + 3\pi) + 4 \cos^2(2\alpha + \pi) - 1} = \operatorname{tg}^4 2\alpha$.

25.38.** Спростіть вираз:

- 1) $\frac{3 + 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha}$;
- 2) $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha}{2(\cos \alpha - 1)}$.

25.39.** Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
- 2) $\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1$, якщо $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$.

25.40.** Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) 2 \operatorname{ctg} 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$;
- 2) $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

25.41.** Доведіть, що:

- 1) $4 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$;
- 2) $16 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3$;
- 3) $\frac{4 \sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} = 1$.

25.42.** Доведіть, що:

- 1) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$;
- 2) $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$.

25.43.** Доведіть тотожність $\sin 3\alpha \sin^3 \alpha + \cos 3\alpha \cos^3 \alpha = \cos^3 2\alpha$.

25.44.** Доведіть тотожність $\sin^3 2\alpha \cos 6\alpha + \cos^3 2\alpha \sin 6\alpha = \frac{3}{4} \sin 8\alpha$.

25.45.** Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{0,5 + 0,5 \sqrt{0,5 + 0,5 \cos \alpha}}$, якщо $0 \leq \alpha \leq \pi$;
- 2) $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
- 3) $\frac{\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin \alpha}} - \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 + \sin \alpha}}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

25.46.** Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 4\alpha}}, \text{ якщо } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$2) \sqrt{0,5 + 0,5 \sqrt{0,5 + 0,5 \sqrt{0,5 + 0,5 \cos \alpha}}}, \text{ якщо } 0 \leq \alpha \leq \pi;$$

$$3) \sqrt{1 + \sin \varphi} - \sqrt{1 - \sin \varphi}, \text{ якщо } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi.$$

25.47.* Обчисліть $\sin 18^\circ$.

25.48.* Доведіть рівність $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалів}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

25.49. Задайте формулою лінійну функцію $y = f(x)$, якщо $f(-10) = -2$, $f(5) = 1$.

25.50. Знайдіть нулі функції $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{x}$.

26. Формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій

Спочатку розглянемо формули, які дають змогу перетворити суму та різницю синусів (косинусів) у добуток.

Запишемо формули додавання для синуса:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (1)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y. \quad (2)$$

Додавши почленно ліві й праві частини цих рівностей, отримаємо:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y. \quad (3)$$

Введемо позначення:

$$x + y = \alpha,$$

$$x - y = \beta.$$

Звідси $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Зазначимо, що α і β можуть набувати будь-яких значень.

Тоді рівність (3) можна переписати так:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Цю тотожність називають **формулою суми синусів**.

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2):

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y.$$

Якщо скористатися раніше введеними позначеннями, то отримаємо тотожність, яку називають **формулою різниці синусів**:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Запишемо формули додавання для косинуса:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Додаючи і віднімаючи почленно ці рівності, відповідно отримуємо:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y; \quad (4)$$

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y. \quad (5)$$

Звідси, увівши позначення $x + y = \alpha$ і $x - y = \beta$, отримаємо відповідно **формули суми і різниці косинусів**:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Перетворимо в добуток вираз $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$. Маємо:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Рівність

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

називають **формулою суми тангенсів**.

Аналогічно можна довести такі три рівності:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\ \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \\ \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} \end{aligned}$$

Їх називають формулами відповідно **різниці тангенсів, суми котангенсів, різниці котангенсів**.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що коли $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \sin^2 \gamma = \\ &= 1 - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + \sin^2 \gamma = 1 - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 1 - \cos^2 \gamma = \\ &= 2 - \cos(\pi - \gamma) \cos(\alpha - \beta) - \cos^2 \gamma = 2 + \cos \gamma \cos(\alpha - \beta) - \cos^2 \gamma = \\ &= 2 + \cos \gamma (\cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma) = 2 + \cos \gamma (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\pi - (\alpha + \beta))) = \\ &= 2 + \cos \gamma (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) = 2 + 2 \cos \gamma \cos \alpha \cos \beta. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

У ході доведення формул суми та різниці синусів (косинусів) було отримано тотожності:

$$\begin{aligned} \sin(x + y) + \sin(x - y) &= 2 \sin x \cos y; \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) &= 2 \cos x \cos y; \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= -2 \sin x \sin y. \end{aligned}$$

Перепишемо їх так:

$$\begin{aligned} \sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \end{aligned}$$

Ці тотожності називають **формулами перетворення добутку тригонометричних функцій у суму**.

ПРИКЛАД 2 Доведіть рівність

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Помножимо і поділимо ліву частину даної рівності на $2 \sin \frac{\pi}{11}$. Отримуємо:

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{7\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{9\pi}{11}}{2 \sin \frac{\pi}{11}}$$

Застосуємо формулу $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta))$:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \frac{2\pi}{11} - \sin \frac{2\pi}{11} + \sin \frac{4\pi}{11} - \sin \frac{4\pi}{11} + \sin \frac{6\pi}{11} - \sin \frac{6\pi}{11} + \sin \frac{8\pi}{11} - \sin \frac{8\pi}{11} + \sin \frac{10\pi}{11}}{2 \sin \frac{\pi}{11}} = \\ & = \frac{\sin \frac{10\pi}{11}}{2 \sin \frac{\pi}{11}} = \frac{\sin \frac{\pi}{11}}{2 \sin \frac{\pi}{11}} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



1. Запишіть формулу: 1) суми синусів; 2) різниці синусів; 3) суми косинусів; 4) різниці косинусів.
2. Запишіть формулу: 1) суми тангенсів; 2) різниці тангенсів; 3) суми котангенсів; 4) різниці котангенсів.
3. Запишіть формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

ВПРАВИ

26.1.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sin 8\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 2\alpha}; \quad 2) \frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos 5\alpha - \cos \alpha}; \quad 3) \frac{\cos 74^\circ - \cos 14^\circ}{\sin 74^\circ + \sin 14^\circ}.$$

26.2.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{\cos 6\alpha + \cos 4\alpha}{\cos \alpha + \cos 9\alpha}; \quad 2) \frac{\cos \alpha - \cos 11\alpha}{\sin 11\alpha - \sin \alpha}; \quad 3) \frac{\cos 58^\circ + \cos 32^\circ}{\sin 58^\circ + \sin 32^\circ}.$$

26.3.° Перетворіть у добуток вираз:

$$1) 1 - 2 \cos \alpha; \quad 2) \sqrt{3} + 2 \cos \alpha; \quad 3) 1 - \sqrt{2} \sin \alpha; \quad 4) \sqrt{3} + \operatorname{ctg} \alpha.$$

26.4.° Перетворіть у добуток вираз:

1) $1 - 2 \sin \alpha$; 2) $\sqrt{3} - 2 \cos \alpha$; 3) $\sqrt{2} + 2 \cos \alpha$; 4) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} \alpha$.

26.5.° Спростіть вираз:

1) $\sin \alpha (1 + 2 \cos 2\alpha)$; 2) $\cos 2\alpha + 2 \sin (\alpha + 30^\circ) \sin (\alpha - 30^\circ)$.

26.6.° Спростіть вираз:

1) $2 \sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha$; 2) $\sin \alpha - 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12} \right)$.

26.7.° Доведіть тотожність:

1) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin (\alpha + \beta) \sin (\beta - \alpha)$;

2) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

3) $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = 2 \cos \alpha$;

4) $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1 + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$;

5) $\frac{(\cos \alpha - \cos 3\alpha) (\sin \alpha + \sin 3\alpha)}{1 - \cos 4\alpha} = \sin 2\alpha$.

26.8.° Доведіть тотожність:

1) $\sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 2\alpha = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos \frac{3\alpha}{2}$;

2) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$;

3) $\frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin \alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$;

4) $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;

5) $\left(\frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 4\alpha}{\cos \alpha} \right) \left(\frac{1}{\sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \right) = 4 \operatorname{ctg} \alpha$.

26.9.° Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{ctg} 6\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha = -\operatorname{ctg} 6\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$;

2) $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{ctg} 4\alpha$;

3) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{8 \cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$.

26.10.° Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha$;

2) $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \sin 2\alpha$.

26.11.* Доведіть тотожність:

$$1) 1 + \sin \alpha + \cos \alpha = 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$2) \frac{1 + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos(4\alpha + \pi) + \cos\left(4\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

26.12.* Доведіть тотожність:

$$1) 1 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha = -4 \cos \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$2) 1 - \sin \alpha - \cos \alpha = 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ \right).$$

26.13.* Спростіть вираз:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right);$$

$$2) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta);$$

$$3) \cos^2(45^\circ + \alpha) - \cos^2(30^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha).$$

26.14.* Спростіть вираз:

$$1) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta);$$

$$2) \cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \sin(75^\circ - 2\alpha) \cos 75^\circ.$$

26.15.** Доведіть рівність $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{8 \cos 20^\circ}{\sqrt{3}}$.

26.16.** Доведіть, що коли $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то має місце тотожність:

$$1) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$2) \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

$$3) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$4) \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

$$5) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma.$$

26.17.** Доведіть, що коли $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то має місце тотожність

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2 + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

26.18.** Доведіть, що коли $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то має місце тотожність:

$$1) \sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma;$$

$$2) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2};$$

$$3) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

26.19.** Доведіть рівність:

$$1) \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2};$$

$$2) \sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \dots + \sin 50^\circ = \frac{\sin 25^\circ}{2 \sin 5^\circ}.$$

26.20.** Доведіть рівність $\cos \frac{\pi}{19} + \cos \frac{3\pi}{19} + \dots + \cos \frac{17\pi}{19} = \frac{1}{2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

26.21. Знайдіть функцію, обернену до функції:

$$1) y = \sqrt[3]{x-1} + 2;$$

$$3) y = \frac{x+1}{x};$$

$$2) y = (x+3)^5 - 3;$$

$$4) y = \sqrt[4]{x-2}.$$

26.22. Вартість товару підвищили на 30 %, а потім знизили на 30 %.

Як остаточно змінилася — збільшилася чи зменшилася — вартість товару та на скільки відсотків?



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Радіанна міра кута

Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

Тригонометричні функції числового аргументу

Косинусом і синусом кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки $P(x; y)$ одиничного кола такої, що $P = R_O^\alpha(P_0)$.

Тангенсом кута повороту α називають відношення синуса цього кута до його косинуса: $\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Котангенсом кута повороту α називають відношення косинуса цього кута до його синуса: $\text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

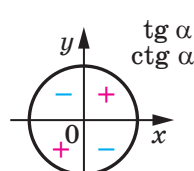
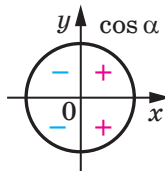
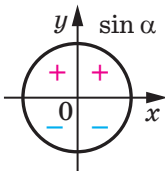
$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg}(\alpha + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ctg } \alpha = \text{ctg}(\alpha + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Знаки значень тригонометричних функцій



$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha$$

$$\text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg } \alpha$$

Періодичні функції

Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T називають періодом функції f .

Якщо серед усіх періодів функції існує найменший додатний період, то його називають головним періодом функції.

Якщо число T є періодом функції f , то й число $-T$ також є періодом функції f .

Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функції f , причому $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ також є періодом функції f .

Якщо число T є періодом функції f , то будь-яке число виду nT , де $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, також є її періодом.

Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Якщо T — головний період функції f , то будь-який період функції f має вигляд nT , де $n \in \mathbb{Z}$ і $n \neq 0$.

Головним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є число 2π ; головним періодом функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є число π .

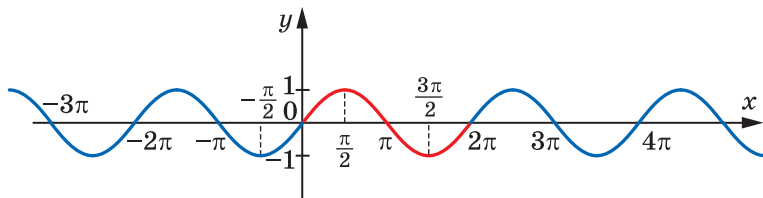
Додатні числа a і b називають сумірними (спільномірними), якщо $\frac{a}{b}$ — раціональне число. Якщо $\frac{a}{b}$ — ірраціональне число, то числа a і b є несумірними.

Число T , яке є як періодом функції f , так і періодом функції g , називають спільним періодом функцій f і g .

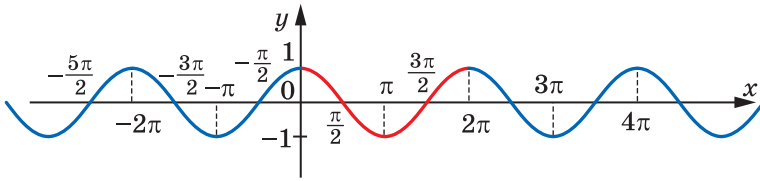
Якщо існують період T_f функції f і період T_g функції g такі, що числа T_f і T_g є сумірними, то функції f і g мають спільний період.

Властивості та графіки тригонометричних функцій

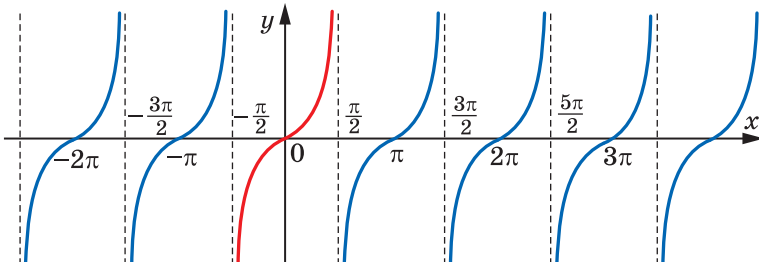
$y = \sin x$:



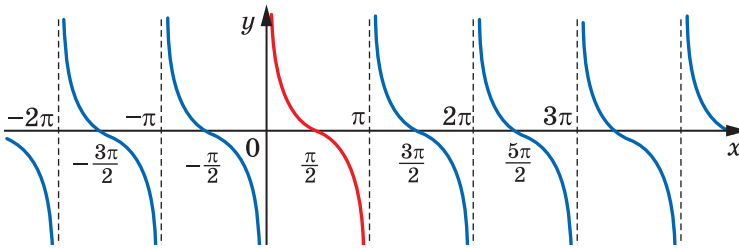
$$y = \cos x:$$



$$y = \operatorname{tg} x:$$



$$y = \operatorname{ctg} x:$$



Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Формули додавання

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Формули зведення

Щоб записати будь-яку з формул зведення, керуються такими правилами.

1. У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва

частина за умови, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Якщо в лівій частині формули кут має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$,

то синус замінюють на косинус, тангенс — на котангенс і навпаки. Якщо кут має вигляд $\pi \pm \alpha$, то заміни функції не відбувається.

Формули подвійного аргументу

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Наслідки з них:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Формули потрійного аргументу

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

Формули половинного аргументу

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Формули для перетворення суми або різниці тригонометричних функцій у добуток

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Формули для перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

§ 4

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ



- 27.** Рівняння $\cos x = b$
- 28.** Рівняння $\sin x = b$
- 29.** Рівняння $\operatorname{tg} x = b$ і $\operatorname{ctg} x = b$
- 30.** Функції $y = \arccos x$,
 $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$
- 31.** Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних
- 32.** Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники.
Застосування обмеженості тригонометричних функцій
- 33.** Тригонометричні нерівності

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з функціями, оберненими до тригонометричних функцій.
- Ви дізнаєтеся, які рівняння і нерівності називають найпростішими тригонометричними рівняннями та нерівностями; ознайомитеся з формулами коренів найпростіших тригонометричних рівнянь; оволодієте різними методами розв'язування тригонометричних рівнянь; навчитесь розв'язувати тригонометричні нерівності.

27. Рівняння $\cos x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\cos x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leq 1$, це рівняння має корені, причому їх безліч.

Сказане легко зрозуміти, звернувшись до графічної інтерпретації: графіки функцій $y = \cos x$ і $y = b$, де $|b| \leq 1$, мають безліч спільних точок (рис. 27.1).

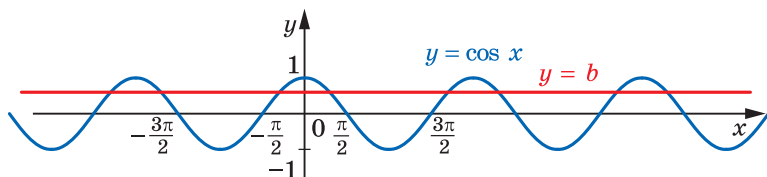


Рис. 27.1

Зрозуміти, як розв'язувати рівняння $\cos x = b$ у загальному випадку, допоможе розгляд окремого випадку. Наприклад, розв'яжемо рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$.

На рисунку 27.2 зображено графіки функцій $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$.

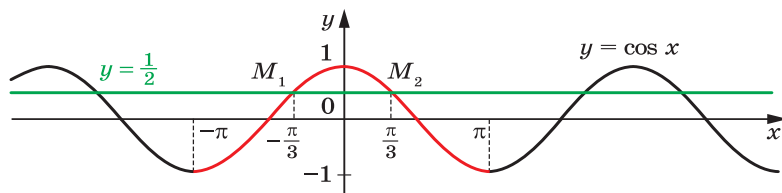


Рис. 27.2

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона частина кривої на рисунку 27.2). Пряма $y = \frac{1}{2}$ перетинає графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ у двох точках M_1 і M_2 , абсциси яких є протилежними числами. Отже, рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ на

проміжку $[-\pi; \pi]$ має два корені. Оскільки $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то цими коренями є числа $-\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{3}$.

Функція $y = \cos x$ є періодичною з періодом 2π . З огляду на це кожен з інших коренів рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ відрізняється від одного зі знайдених коренів $-\frac{\pi}{3}$ або $\frac{\pi}{3}$ на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, корені розглядуваного рівняння можна задати формулами $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ і $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Зазвичай ці дві формули замінюють одним записом:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Повернемося до рівняння $\cos x = b$, де $|b| \leq 1$. На рисунку 27.3 показано, що на проміжку $[-\pi; \pi]$ це рівняння має два корені α і $-\alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$ (при $b = 1$ ці корені збігаються та дорівнюють нулю).

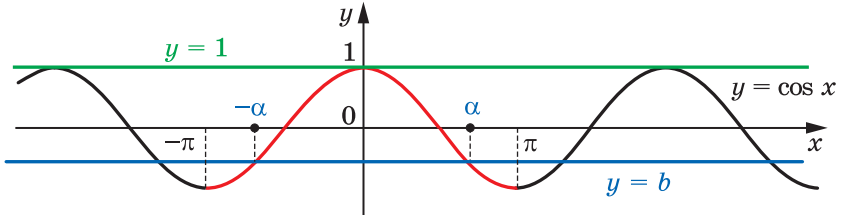


Рис. 27.3

Тоді всі корені рівняння $\cos x = b$ мають вигляд

$$x = \pm \alpha + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ця формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\cos x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арккосинус.

Означення. Арккосинусом числа b , де $|b| \leq 1$, називають таке число α з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює b .

Для арккосинуса числа b використовують позначення $\arccos b$. Наприклад,

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{3} \in [0; \pi] \text{ і } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \text{ оскільки } \frac{3\pi}{4} \in [0; \pi] \text{ і } \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{2} \in [0; \pi] \text{ і } \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\arccos(-1) = \pi, \text{ оскільки } \pi \in [0; \pi] \text{ і } \cos \pi = -1.$$

Узагалі, $\arccos b = \alpha$, якщо $\alpha \in [0; \pi]$ і $\cos \alpha = b$.

Звернемо увагу, що з усіх чисел, косинус яких дорівнює даному числу, арккосинус — це єдине число, що належить проміжку $[0; \pi]$.

Наприклад, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, але $\arccos \frac{1}{2} \neq -\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3} \notin [0; \pi]$.

Тепер формулу коренів рівняння $\cos x = b$, $|b| \leq 1$, можна записати в такому вигляді:

$$x = \pm \arccos b + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\cos x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 17). Нагадаємо отримані результати:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Такі самі результати можна отримати, використовуючи формулу (1). Ці три рівняння зустрічатимуться часто, тому радимо запам'ятати наведені формули.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; \quad 3) \cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0; \quad 4) \cos \pi x^2 = 1.$$

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (1), можемо записати:

$$4x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Далі отримуємо: } 4x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

2) Маємо: $\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad \frac{x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = \pm \pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n.$$

Відповідь: $\pm \pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

3) Перепишемо дане рівняння так: $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.$ Отримуємо:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n; \quad 7x = \frac{7\pi}{10} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}.$

Відповідь: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$

4) Маємо: $\pi x^2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$$x^2 = 2n, n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $x^2 \geq 0$, то $2n \geq 0$, тобто $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

Тепер можна записати: $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

Відповідь: $\sqrt{2n}, -\sqrt{2n}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$ ◀

ПРИКЛАД 2 Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = b$ на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ залежно від значення параметра $b.$

Розв'язання. Зобразимо графік функції $y = \cos x$ на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ (рис. 27.4). Кількість коренів визначається кількістю точок перетину прямої $y = b$ з виділеною червоним кольором частиною графіка функції $y = \cos x.$

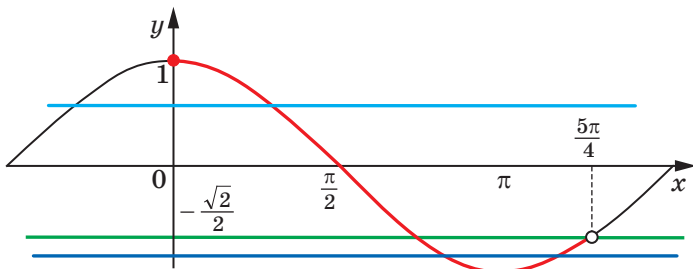


Рис. 27.4

Звернемо увагу на те, що точка $(0; 1)$ належить червоній кривій, а точка $\left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — не належить.

Розглядаючи різні положення прямої $y = b$, отримуємо такі результати:

якщо $b < -1$, то коренів немає;

якщо $b = -1$, то один корінь;

якщо $-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то два корені;

якщо $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq b \leq 1$, то один корінь;

якщо $b > 1$, то коренів немає.

Відповідь: якщо $b < -1$ або $b > 1$, то коренів немає;

якщо $b = -1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq b \leq 1$, то один корінь;

якщо $-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то 2 корені. ◀



1. При яких значеннях b має корені рівняння $\cos x = b$?
2. Скільки коренів має рівняння $\cos x = b$ при $|b| \leq 1$?
3. Що називають арккосинусом числа b ?
4. Запишіть формулу коренів рівняння $\cos x = b$ при $|b| \leq 1$.

ВПРАВИ

27.1.° Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\cos x = \frac{1}{2}$; | 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; | 5) $\cos x = \frac{\pi}{3}$; |
| 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; | 4) $\cos x = \frac{1}{3}$; | 6) $\cos x = \frac{\pi}{4}$. |

27.2.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{4}{7}$.

27.3.° Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|---|----------------------------------|---|
| 1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$; | 3) $\cos 6x = 1$; | 5) $\cos 9x = -\frac{1}{5}$; |
| 2) $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 4) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$; | 6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. |

27.4.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos 2x = \frac{1}{2}; \quad 2) \cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \cos \frac{3x}{4} = -1.$$

27.5.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos \left(\frac{x}{6} - 2 \right) = -1; \quad 3) 2 \cos \left(\frac{\pi}{8} - 3x \right) + 1 = 0.$$

27.6.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos \left(\frac{\pi}{9} - 4x \right) = 1; \quad 2) \sqrt{2} \cos \left(\frac{x}{2} + 3 \right) + 1 = 0.$$

27.7.° Скільки коренів рівняння $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ належать проміжку

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right]?$$

27.8.° Знайдіть усі корені рівняння $\cos \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = -\frac{1}{2}$, які задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{6} < x < 4\pi$.

27.9.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos \frac{2\pi}{x} = 1; \quad 2) \cos \pi \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \cos(\cos x) = \frac{1}{2}.$$

27.10.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos(\cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

27.11.° При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\cos 2x = -4a^2 + 4a - 2$?

27.12.° При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -a^2 - 1?$$

27.13.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$

містить не менше ніж три корені рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$?

27.14.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$

містить не менше ніж три корені рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$?

27.15.** Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку

$$\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{6} \right] \text{ залежно від значення параметра } a.$$

27.16.** Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right] \text{ залежно від значення параметра } a.$$

27.17.** При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x - a) \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

має єдиний корінь на проміжку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$?

27.18.** При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x + a) \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

має єдиний корінь на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

27.19. Спростіть вираз:

$$1) \frac{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}; \quad 2) \frac{1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{a - b}{\left(\frac{1}{a^2} + b^2\right)\left(\frac{1}{a^2} - a^4b^4\right)}.$$

27.20. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x^2 - 5x + 2}}; \quad 3) y = \sqrt{x^2 + 5x - 14} + \frac{1}{x^2 - 64};$$

$$2) y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x + 2}; \quad 4) y = \sqrt{4 - 2\sqrt{x}}.$$

28. Рівняння $\sin x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \sin x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\sin x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leq 1$, це рівняння має корені, причому їх безліч.

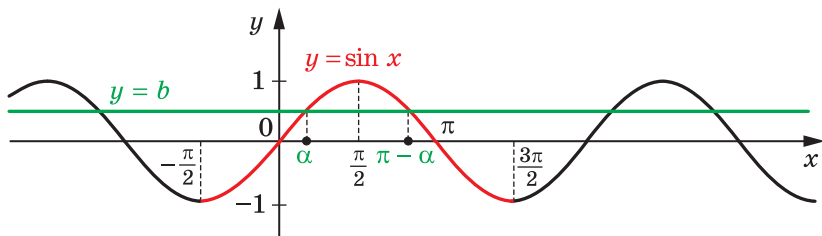
Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\sin x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 17).

Нагадаємо отримані результати:

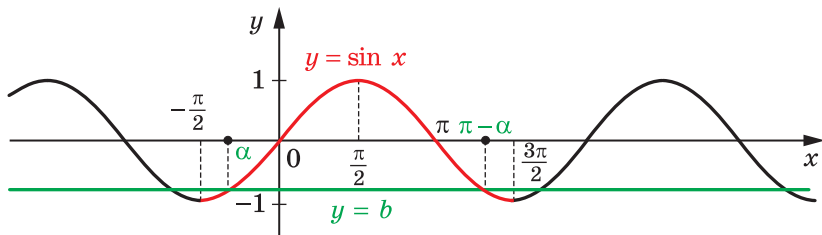
$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Для того щоб отримати загальну формулу коренів рівняння $\sin x = b$, де $|b| \leq 1$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 28.1 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = b$, $|b| \leq 1$.



а



б

Рис. 28.1

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона частина кривої на рисунку 28.1). На цьому проміжку рівняння $\sin x = b$ має два корені. Позначимо корінь, який належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, через α . Оскільки $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, то другий корінь дорівнює $\pi - \alpha$. Зауважимо, що при $b = 1$ корені α і $\pi - \alpha$ збігаються та дорівнюють $\frac{\pi}{2}$.

Оскільки функція $y = \sin x$ є періодичною з періодом 2π , то кожен з інших коренів рівняння $\sin x = b$ відрізняється від одного зі знайдених коренів на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді корені рівняння $\sin x = b$ можна задати формулами

$$x = \alpha + 2\pi n \quad \text{і} \quad x = \pi - \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ці дві формули можна замінити одним записом:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Справді, якщо k — парне число, тобто $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо: $x = \alpha + 2\pi n$; якщо k — непарне число, тобто $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо: $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$.

Формула (1) показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\sin x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арксинус.

Означення. Арксинусом числа b , де $|b| \leq 1$, називають таке число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b .

Для арксинуса числа b використовують позначення $\arcsin b$.

Наприклад,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{оскільки} \quad \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{і} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \text{оскільки} \quad -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{і} \quad \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arcsin 0 = 0, \quad \text{оскільки} \quad 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{і} \quad \sin 0 = 0;$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{оскільки} \quad -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{і} \quad \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Узагалі, $\arcsin b = \alpha$, якщо $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \alpha = b$.

Звернемо увагу, що з усіх чисел, синус яких дорівнює даному числу, арксинус — це єдине число, що належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Наприклад, $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; але $\arcsin \frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$, оскільки $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тепер формулу (1) для коренів рівняння $\sin x = b$, $|b| \leq 1$, можна записати або у вигляді сукупності:

$$\begin{cases} x = \arcsin b + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin b + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

або одним записом:

$$x = (-1)^k \arcsin b + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Узагалі, одну й ту саму відповідь до тригонометричних рівнянь часто можна подати в різних формах запису.

Зрозуміло, що формулу (2) можна застосовувати і для випадків $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$. Проте рівняння $\sin x = 1$, $\sin x = 0$, $\sin x = -1$ зустрічатимуться досить часто, тому радимо запам'ятати формули їхніх коренів, які записано на початку пункту.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}; \quad 2) \sin \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (2), запишемо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Далі отримуємо: } \frac{x}{2} = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \pi n; \quad \frac{x}{2} = -(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

$$\text{Відповідь: } (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \text{ Перепишемо дане рівняння у вигляді } -\sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Тоді } \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n; \quad 3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n; \quad x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, то можна записати:

$$\sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x = 1.$$

Використовуючи формулу синуса суми $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$, отримаємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1.$$

Звідси $\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

Зауважимо, що під час розв'язування рівняння прикладу 2 можна було скористатися й іншими формулами додавання, наприклад формулою косинуса різниці $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$.

Справді, оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, то

$$\cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x = 1; \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Звідси отримуємо ту саму відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Скільки коренів залежно від значення параметра b має на проміжку $[0; 2\pi)$ рівняння

$$(\sin x - b)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0? \quad (3)$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне сукупності

$$\begin{cases} \sin x = b, \\ \cos x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Друге рівняння цієї сукупності на проміжку $[0; 2\pi)$ має два корені: $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{5\pi}{3}$.

При $|b| > 1$ рівняння $\sin x = b$ коренів не має. Отже, рівняння (3) має два корені.

Якщо $b = 1$ або $b = -1$, то рівняння $\sin x = b$ на проміжку $[0; 2\pi)$ має один корінь. Це відповідно числа $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$. Таким чином, при $|b| = 1$ рівняння (3) має три корені.

Якщо $|b| < 1$, то рівняння $\sin x = b$ на проміжку $[0; 2\pi)$ має два корені. Через це може здаватися, що рівняння (3) в цьому випадку матиме чотири корені. Насправді один із коренів рівняння $\sin x = b$ може збігатися із числом $\frac{\pi}{3}$ або із числом $\frac{5\pi}{3}$.

Знайдемо значення параметра b , при яких числа $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{5\pi}{3}$ є коренями рівняння $\sin x = b$. Маємо:

$$1) \sin \frac{\pi}{3} = b; \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \sin \frac{5\pi}{3} = b; \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ рівняння $\sin x = b$ на проміжку $[0; 2\pi)$ має два корені $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{2\pi}{3}$, а рівняння (3) має три корені: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

При $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ аналогічно отримуємо, що рівняння (3) має три корені: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Відповідь: якщо $b < -1$ або $b > 1$, то 2 корені; якщо $b = -1$, або $b = 1$, або $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корені; якщо $-1 < b < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{3}}{2} < b < \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{\sqrt{3}}{2} < b < 1$, то 4 корені. ◀



1. При яких значеннях b має корені рівняння $\sin x = b$?
2. Скільки коренів має рівняння $\sin x = b$ при $|b| \leq 1$?
3. Що називають арксинусом числа b ?
4. Запишіть формулу коренів рівняння $\sin x = b$ при $|b| \leq 1$.

ВПРАВИ

28.1.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sin x = \frac{1}{4}; \quad 4) \sin x = \sqrt{2}.$$

28.2.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin x = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad 4) \sin x = 1,5.$$

28.3.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{x}{6} = -\frac{1}{2}; \quad 2) \sin 5x = 1; \quad 3) \sin(-8x) = \frac{2}{9}.$$

28.4.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin \frac{x}{7} = 0; \quad 3) \sin \frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

28.5.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) = -1; \quad 3) \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 = 0.$$

28.6.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1; \quad 2) 2 \sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0.$$

28.7.° Знайдіть усі корені рівняння $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, які належать проміжку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

28.8.° Скільки коренів рівняння $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

28.9.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2; \quad 3) 3 \sin \frac{x}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} = 3.$$

$$2) \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x = 1;$$

28.10.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin x - \sqrt{3} \cos x = 1; \quad 2) \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

28.11.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{2}{x} = 0; \quad 2) \sin \pi \sqrt{x} = -1; \quad 3) \sin(\cos x) = 0,5.$$

28.12.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \cos(\pi \sin x) = 0.$$

28.13.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$

містить не менше ніж чотири корені рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$?

28.14.** При яких від'ємних значеннях параметра a проміжок $[a; 0]$

містить не менше ніж три корені рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$?

28.15.** Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ залежно від значення параметра a на проміжку:

1) $\left[0; \frac{11\pi}{6}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$.

28.16.** Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ залежно від значення параметра a на проміжку:

1) $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; 2) $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

28.17.** Скільки коренів залежно від значення параметра a має

рівняння $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sin x - a) = 0$ на проміжку $[0; 2\pi]$?

28.18.** Скільки коренів залежно від значення параметра a має

рівняння $(\cos x - a)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$ на проміжку $(0; 2\pi]$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

28.19. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{15}{\sqrt[3]{25}}$; 3) $\frac{30}{\sqrt[4]{216}}$; 4) $\frac{12}{\sqrt{17} + \sqrt{5}}$.

28.20. Побудуйте графік функції, укажіть її область значень і проміжки зростання та спадання:

1) $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 4x - x^2, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ -x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 0, \\ \sqrt[4]{x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

29. Рівняння $\operatorname{tg} x = b$ і $\operatorname{ctg} x = b$

✎ Оскільки областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина \mathbb{R} , то рівняння $\operatorname{tg} x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b .

Для того щоб отримати формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 29.1 зображено графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = b$.

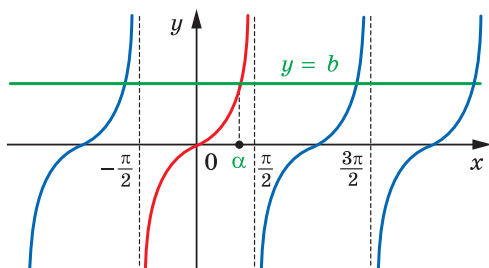


Рис. 29.1

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції (червона крива на рисунку 29.1). На цьому проміжку рівняння $\operatorname{tg} x = b$ при будь-якому b має єдиний корінь α .

Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є періодичною з періодом π , то кожен з інших коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn , $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді множину коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$ можна задати формулою $x = \alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отримана формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\operatorname{tg} x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b .

Для арктангенса числа b використовують позначення $\operatorname{arctg} b$. Наприклад,

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ і } \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \text{ оскільки } -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ і } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \text{ оскільки } 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ і } \operatorname{tg} 0 = 0.$$

$$\text{Узагалі, } \operatorname{arctg} b = \alpha, \text{ якщо } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ і } \operatorname{tg} \alpha = b.$$

Зазначимо, що, наприклад, $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$. Проте $\operatorname{arctg} 1 \neq -\frac{3\pi}{4}$, оскільки $-\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тепер формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$ можна записати так:

$$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

↪ Оскільки областю значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина \mathbb{R} , то рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b .

На рисунку 29.2 зображено графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ і $y = b$.

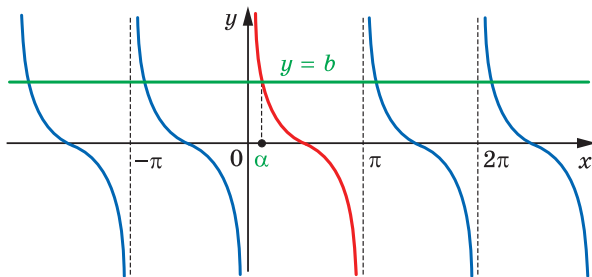


Рис. 29.2

Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції (червона крива на рисунку 29.2). На цьому проміжку рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ при будь-якому b має єдиний корінь α .

Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є періодичною з періодом π , то кожен з інших коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn , $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді множину коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ можна задати формулою

$$x = \alpha + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Корінь α має спеціальну назву — арккотангенс.

Означення. Арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює b .

Для арккотангенса числа b використовують позначення $\operatorname{arccctg} b$. Наприклад,

$$\operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{3} \in (0; \pi) \text{ і } \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{arccctg} (-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}, \text{ оскільки } \frac{5\pi}{6} \in (0; \pi) \text{ і } \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{arccctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{2} \in (0; \pi) \text{ і } \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0.$$

Узагалі, $\operatorname{arccctg} b = \alpha$, якщо $\alpha \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} \alpha = b$.

Зазначимо, що, наприклад, $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Проте $\operatorname{arccctg} (-1) \neq -\frac{\pi}{4}$,

оскільки $-\frac{\pi}{4} \notin (0; \pi)$.

Тепер формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ можна записати так:

$$x = \operatorname{arccctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{tg} \frac{2x}{3} = -\sqrt{3}; \quad 2) \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = -1.$$

Розв'язання. 1) Маємо: $\frac{2x}{3} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z};$

$$\frac{2}{3}x = -\frac{\pi}{3} + \pi k; \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

2) Маємо: $\operatorname{ctg} \left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1;$

$$x - \frac{2\pi}{3} = \operatorname{arccctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad x = \frac{11}{12}\pi + \pi k.$$

Відповідь: $\frac{11}{12}\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \blacktriangleleft$

ПРИКЛАД 2 Визначте, при яких значеннях параметра b рівняння $(x - b) \operatorname{tg} x = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ має єдиний корінь.

Розв'язання. Множина коренів рівняння $\operatorname{tg} x = 0$ визначається формулою $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Розглядуваному проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ належить лише один корінь $x = 0$.

Рівняння $x - b = 0$ має єдиний корінь $x = b$.

Якщо $b = 0$, то початкове рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

Якщо $b \in \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то початкове рівняння на заданому проміжку має два корені: $x = 0$ і $x = b$.

Зрозуміло, що коли $b \notin \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$, то початкове рівняння має тільки один корінь.

Відповідь: $b = 0$, або $b < -\frac{\pi}{6}$, або $b \geq \frac{\pi}{2}$. ◀



1. При яких значеннях b має корені рівняння $\operatorname{tg} x = b$? $\operatorname{ctg} x = b$?
2. Скільки коренів має рівняння $\operatorname{tg} x = b$? $\operatorname{ctg} x = b$?
3. Що називають арктангенсом числа b ? арккотангенсом числа b ?
4. Запишіть формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$; $\operatorname{ctg} x = b$.

ВПРАВИ

29.1.° Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|---------------------------------------|--|---|
| 1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; | 3) $\operatorname{tg} x = 5$; | 5) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; |
| 2) $\operatorname{tg} x = -1$; | 4) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; | 6) $\operatorname{ctg} x = 0$. |

29.2.° Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $\operatorname{tg} x = 1$; | 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; | 5) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; |
| 2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; | 4) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; | 6) $\operatorname{tg} x = 0$. |

29.3.° Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}$; | 2) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0$; | 3) $\operatorname{ctg} 6x = \frac{6}{11}$. |
|---|---|---|

29.4.° Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $\operatorname{tg} \frac{3}{5}x = 0$; | 2) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$; | 3) $\operatorname{ctg} \frac{3}{2}x = 5$. |
|---|---|--|

29.5.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 3) \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) + 3 = 0;$$

$$2) \operatorname{tg} (3 - 2x) = 2; \quad 4) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

29.6.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1; \quad 2) \operatorname{ctg} (4 - 3x) = 2; \quad 3) 3 \operatorname{tg} (3x + 1) - \sqrt{3} = 0.$$

29.7.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{x} = 0; \quad 2) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{x}} = 1; \quad 3) \operatorname{tg} (\pi \sin x) = \sqrt{3}.$$

29.8.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5x} = 1; \quad 2) \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}} = -1; \quad 3) \operatorname{ctg} (\pi \cos x) = 1.$$

29.9.** При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

$$1) \frac{\operatorname{tg} x - a}{\operatorname{ctg} x + 3} = 0; \quad 2) \frac{\sin x - a}{3 \operatorname{tg}^2 x - 1} = 0?$$

29.10.** При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

$$1) \frac{\operatorname{ctg} x + a}{\operatorname{tg} x - 2} = 0; \quad 2) \frac{\cos x - a}{\operatorname{ctg}^2 x - 3} = 0?$$

29.11.** При яких значеннях параметра a рівняння $(x + a)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$

на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ має єдиний корінь?

29.12.** При яких значеннях параметра a рівняння $(x - a)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$

на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right)$ має єдиний корінь?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

29.13. Графіки яких із даних функцій симетричні відносно осі ординат:

$$1) f(x) = \frac{4 - x^2}{\cos 2x}; \quad 3) f(x) = \sqrt[4]{2 - x} + \sqrt[4]{2 + x};$$

$$2) f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}; \quad 4) f(x) = x^2 \operatorname{tg} x?$$

29.14. Знайдіть функцію, обернену до даної:

$$1) f(x) = x^2 + 4, \quad x \in [0; +\infty); \quad 3) f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x \in (-\infty; 0].$$

$$2) f(x) = x^2 - 1, \quad x \in (-\infty; 0];$$

30. Функції $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \arctg x$ і $y = \operatorname{arctg} x$

Для будь-якого $a \in [-1; 1]$ рівняння $\cos x = a$ на проміжку $[0; \pi]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arccos a$ (рис. 30.1). Отже, кожному числу x із проміжку $[-1; 1]$ можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $[0; \pi]$ таке, що $y = \arccos x$.

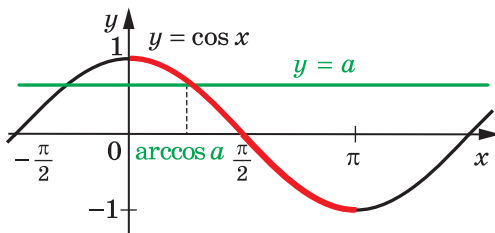


Рис. 30.1

Указане правило задає функцію $f(x) = \arccos x$ із областю визначення $D(f) = [-1; 1]$ та областю значень $E(f) = [0; \pi]$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \cos x$ із областю визначення $D(g) = [0; \pi]$.

Справді, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;

$E(f) = D(g) = [0; \pi]$.

З означення арккосинуса випливає, що для всіх x із проміжку $[-1; 1]$ виконується рівність

$$\cos(\arccos x) = x$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Властивості взаємно обернених функцій, розглянуті в п. 4, дають змогу визначити деякі властивості функції $f(x) = \arccos x$.

Оскільки функція $g(x) = \cos x$, $D(g) = [0; \pi]$, є спадною, то з теореми 4.3 випливає, що функція $f(x) = \arccos x$ також є спадною.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо: $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in [0; \pi]$ виконується рівність

$$\arccos(\cos x) = x$$

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Спираючись на це, можна побудувати графік функції $f(x) = \arccos x$ (рис. 30.2).

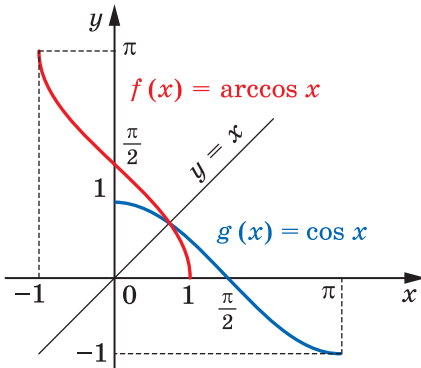


Рис. 30.2

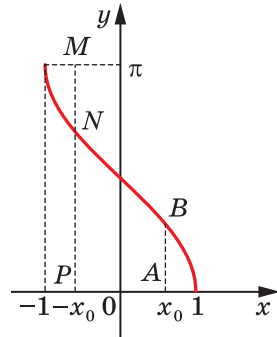


Рис. 30.3

Відзначимо ще одну властивість функції $y = \arccos x$: для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (1)$$

Наприклад, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Ця властивість має просту графічну ілюстрацію. На рисунку 30.3 $AB = MN = \arccos x_0$, $NP = \arccos(-x_0)$, а $MN + NP = \pi$.

Доведемо рівність (1). Нехай $\arccos(-x) = \alpha_1$, $\pi - \arccos x = \alpha_2$. Зауважимо, що $\alpha_1 \in [0; \pi]$, $\alpha_2 \in [0; \pi]$. Функція $y = \cos x$ є спадною на проміжку $[0; \pi]$, тому на цьому проміжку кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Отже, показавши, що $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$, ми тим самим доведемо рівність $\alpha_1 = \alpha_2$.

Маємо: $\cos \alpha_1 = \cos(\arccos(-x)) = -x$;
 $\cos \alpha_2 = \cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.

Для будь-якого $a \in [-1; 1]$ рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arcsin a$ (рис. 30.4).

Отже, кожному числу x із проміжку $[-1; 1]$ можна поставити

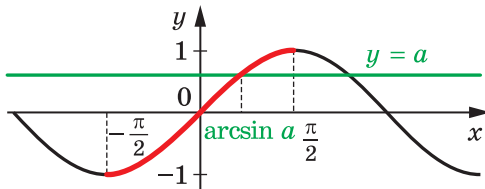


Рис. 30.4

у відповідність єдине число y із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ таке, що $y = \arcsin x$.

Указане правило задає функцію $f(x) = \arcsin x$ із областю визначення $D(f) = [-1; 1]$ та областю значень $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \sin x$ із областю визначення $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Справді, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;

$$E(f) = D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

З означення арксинуса випливає, що для всіх $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\sin(\arcsin x) = x$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \arcsin x$.

Оскільки функція $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, є непарною, то функція $f(x) = \arcsin x$ також є непарною (див. ключову задачу 4.10). Інакше кажучи, для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

Наприклад, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Функція $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, є зростаючою. Отже, функція $f(x) = \arcsin x$ також є зростаючою (див. теорему 4.3).

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо: $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ виконується рівність

$$\arcsin(\sin x) = x$$

Знову скористаємося тим, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

На рисунку 30.5 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, побудувати графік функції $f(x) = \arcsin x$.

Доведемо, що для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

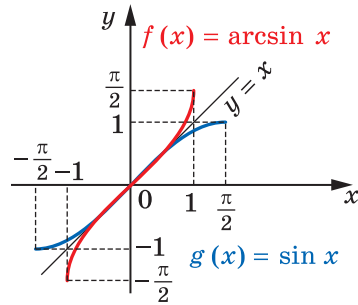


Рис. 30.5

Для цього покажемо, що $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

Маємо: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$. Крім того, $0 \leq \arccos x \leq \pi$. Отже,

$$-\pi \leq -\arccos x \leq 0; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Бачимо, що значення виразів $\arcsin x$ і $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ належать проміжку зростання функції $y = \sin x$.

Отже, достатньо показати, що $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$.

Маємо: $\sin(\arcsin x) = x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$.

У таблиці наведено властивості функцій $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$.

Властивість	$y = \arccos x$	$y = \arcsin x$
Область визначення	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Область значень	$[0; \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Нулі функції	$x = 1$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in [-1; 1)$, то $\arccos x > 0$	Якщо $x \in [-1; 0)$, то $\arcsin x < 0$; якщо $x \in (0; 1]$, то $\arcsin x > 0$
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання / спадання	Спадна	Зростаюча

ПРИКЛАД 1 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4 - \arccos 3x$.

Розв'язання. Оскільки $0 \leq \arccos 3x \leq \pi$, то $-\pi \leq -\arccos 3x \leq 0$ і $4 - \pi \leq 4 - \arccos 3x \leq 4$.

Зазначимо, що $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 4 - \pi$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$.

Відповідь: найменше значення дорівнює $4 - \pi$, найбільше значення дорівнює 4. ◀

ПРИКЛАД 2 Обчисліть: 1) $\arccos\left(\cos \frac{1}{3}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 6)$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу $\arccos(\cos x) = x$, де $x \in [0; \pi]$, маємо: $\arccos\left(\cos \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

2) Здавалося б, відповідь можна отримати одразу, зважаючи на рівність $\arcsin(\sin x) = x$. Проте число $x = 6$ не належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а отже, не може дорівнювати значенню арксинуса.

Правильне міркування має бути, наприклад, таким:
 $\arcsin(\sin 6) = \arcsin(\sin(6 - 2\pi))$.

Оскільки $6 - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$.

Відповідь: $6 - 2\pi$. ◀

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$.

Розв'язання. Нехай $\arccos \frac{3}{5} = \alpha$, тоді $\alpha \in [0; \pi]$ і $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.
 Задачу зведено до пошуку значення $\sin \alpha$.

Урахуємо, що коли $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin \alpha \geq 0$. Тоді отримуємо:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Відповідь: $\frac{4}{5}$. ◀

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \arcsin(\sin x)$.

Розв'язання. Здається природним припустити, що шуканим графіком є пряма $y = x$. Проте це неправильно, оскільки $\arcsin(\sin x) = x$ лише за умови $|x| \leq \frac{\pi}{2}$.

Дана функція є періодичною з періодом $T = 2\pi$, тому достатньо побудувати її графік на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ завдовжки в період.

Якщо $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x) = x$.

Отже, на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = x$.

Якщо $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$, отже, $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$. Таким чином, на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = \pi - x$.

Графік функції $y = \arcsin(\sin x)$ зображено на рисунку 30.6. ◀

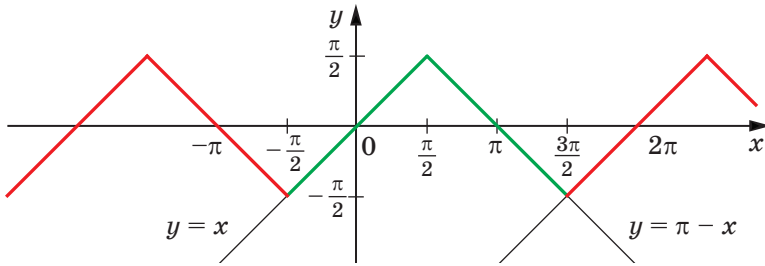


Рис. 30.6

☞ Для будь-якого a рівняння $\operatorname{tg} x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\operatorname{arctg} a$ (рис. 30.7). Отже, будь-якому числу x можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ таке, що $y = \operatorname{arctg} x$.

Указане правило задає функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x$ із областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ та областю значень $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

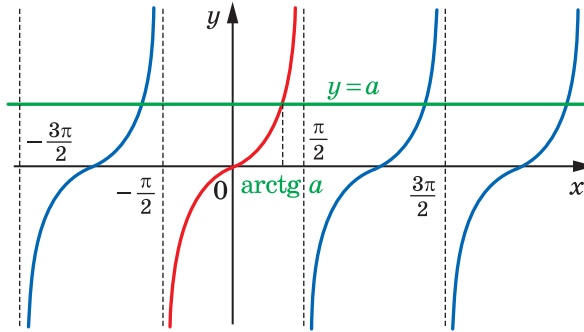


Рис. 30.7

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \operatorname{tg} x$ із областю визначення $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Справді, $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$;

$$E(f) = D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

З означення арктангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Властивості взаємно обернених функцій, розглянуті в п. 4, дають змогу визначити деякі властивості функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Оскільки функція $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є зростаючою, то з теореми 4.3 випливає, що функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ також є зростаючою.

Оскільки функція $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є непарною, то функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ також є непарною (див. ключову задачу 4.10). Інакше кажучи, для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

Наприклад, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо: $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується рівність

$$\text{arctg}(\text{tg } x) = x$$

Нагадаємо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. На рисунку 30.8 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \text{tg } x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, побудувати графік функції $f(x) = \text{arctg } x$.

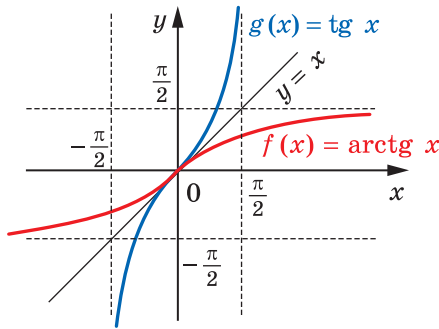


Рис. 30.8

Для будь-якого a рівняння $\text{ctg } x = a$ на проміжку $(0; \pi)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\text{arctg} a$ (рис. 30.9). Отже, будь-якому числу x можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $(0; \pi)$ таке, що $y = \text{arctg} a$.

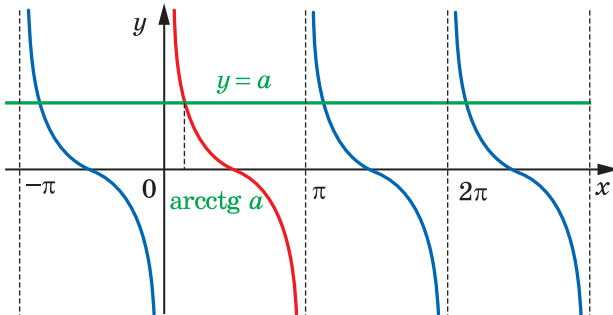


Рис. 30.9

Указане правило задає функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x$ із областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ та областю значень $E(f) = (0; \pi)$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \operatorname{ctg} x$ із областю визначення $D(g) = (0; \pi)$.

Справді, $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$;

$E(f) = D(g) = (0; \pi)$.

З означення арккотангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Оскільки функція $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(g) = (0; \pi)$, є спадною, то функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ також є спадною.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо: $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in (0; \pi)$ виконується рівність

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x$$

На рисунку 30.10 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(g) = (0; \pi)$, побудувати графік функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

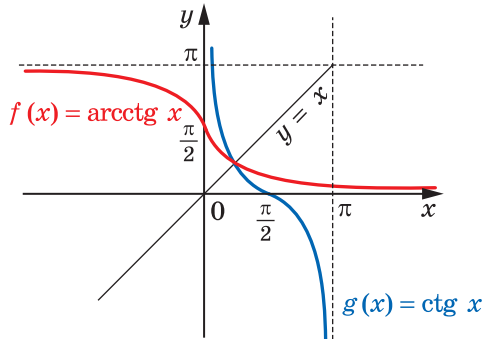


Рис. 30.10

Відзначимо ще одну властивість функції арккотангенса: для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$$

Наприклад, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Доведемо цю властивість.

Нехай $\text{arcctg } (-x) = \alpha_1$ і $\pi - \text{arcctg } x = \alpha_2$. Зауважимо, що $\alpha_1 \in (0; \pi)$, $\alpha_2 \in (0; \pi)$.

Функція $y = \text{ctg } x$ спадає на проміжку $(0; \pi)$, тому на цьому проміжку кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Отже, показавши, що $\text{ctg } \alpha_1 = \text{ctg } \alpha_2$, ми тим самим доведемо рівність $\alpha_1 = \alpha_2$.

Маємо: $\text{ctg } \alpha_1 = \text{ctg } (\text{arcctg } (-x)) = -x$;

$\text{ctg } \alpha_2 = \text{ctg } (\pi - \text{arcctg } x) = -\text{ctg } (\text{arcctg } x) = -x$.

Отже, $\text{ctg } \alpha_1 = \text{ctg } \alpha_2$.

Покажемо, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\text{arctg } x + \text{arcctg } x = \frac{\pi}{2}$$

Достатньо показати, що $\text{arctg } x = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg } x$.

Маємо: $-\frac{\pi}{2} < \text{arctg } x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \text{arcctg } x < \pi$;

$$-\pi < -\text{arcctg } x < 0; \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \text{arcctg } x < \frac{\pi}{2}.$$

Бачимо, що значення виразів $\text{arctg } x$ і $\frac{\pi}{2} - \text{arcctg } x$ належать проміжку зростання функції $y = \text{tg } x$. Отже, достатньо показати, що $\text{tg } (\text{arctg } x) = \text{tg } \left(\frac{\pi}{2} - \text{arcctg } x \right)$.

Маємо: $\text{tg } (\text{arctg } x) = x$, $\text{tg } \left(\frac{\pi}{2} - \text{arcctg } x \right) = \text{ctg } (\text{arcctg } x) = x$.

У таблиці наведено властивості функцій $y = \text{arctg } x$ і $y = \text{arcctg } x$.

Властивість	$y = \text{arctg } x$	$y = \text{arcctg } x$
Область визначення	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Область значень	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$	$(0; \pi)$
Нулі функції	$x = 0$	—

Властивість	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcsctg} x$
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $\operatorname{arctg} x < 0$; якщо $x \in (0; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$	$\operatorname{arcsctg} x > 0$ при всіх x
Парність	Непарна	Не є ні парною, ні непарною
Зростання / спадання	Зростаюча	Спадна

ПРИКЛАД 5 Обчисліть $\cos\left(2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тоді $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$.

$$\text{Запишемо: } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{9}{10}.$$

$$\text{Звідси } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{9}{10} - 1 = \frac{4}{5}.$$

Відповідь: $\frac{4}{5}$. ◀

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є зростаючою, то можна записати:

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{2} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{3} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Звідси } 0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}.$$

Отже, значення виразів, записаних у лівій і правій частинах рівності, яка доводиться, належать проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. На цьому проміжку функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає.

Тоді для доведення достатньо показати, що

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}.$$

Маємо: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$;

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right) = \frac{\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1. \blacktriangleleft$$



Укажіть властивості функції $y = \arccos x$; $y = \arcsin x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.

ВПРАВИ

30.1.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin(x - 1)$; 2) $y = \arccos \sqrt{x}$; 3) $y = \arccos \frac{\pi}{x+4}$.

30.2.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$; 2) $y = \arccos \sqrt{3-x}$; 3) $y = \arccos \frac{2}{3x}$.

30.3.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)}$.

30.4.° Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\pi - \operatorname{arcctg} x}$.

30.5.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \arccos x + 2$.

30.6.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = \arccos x + \pi$; 2) $y = \arcsin x + 1$.

30.7.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \operatorname{arctg} x + 2$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$.

30.8.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \operatorname{arcctg} x + 4$; 2) $y = \sqrt{-\operatorname{arctg} x}$.

30.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x = \frac{1}{2}$; 3) $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$.

30.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\arccos(2x-3) = \frac{\pi}{2}$.

30.11.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}; \quad 2) \operatorname{arctg} x = 1; \quad 3) \operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}.$$

30.12.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}; \quad 2) \operatorname{arctg} x = -1; \quad 3) \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}.$$

30.13.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \arcsin x > -\frac{\pi}{2}; \quad 3) \arcsin x > \frac{\pi}{2}; \quad 5) \arccos x > 0;$$

$$2) \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 4) \arccos x \leq 0; \quad 6) \arccos x < \pi.$$

30.14.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \arccos x \geq \pi; \quad 3) \arccos x \geq 0; \quad 5) \arccos x > \pi;$$

$$2) \arcsin x < \frac{\pi}{2}; \quad 4) \arccos x \leq \pi; \quad 6) \arcsin x \leq -\frac{\pi}{2}.$$

30.15.* Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{\pi - \arccos x}; \quad 2) y = \sqrt{\arccos x - \pi}; \quad 3) y = \arcsin(\sqrt{x+1}).$$

30.16.* Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}; \quad 3) y = \sqrt{-\arccos x};$$

$$2) y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}; \quad 4) y = \arccos(x^2 - 2x + 2).$$

30.17.* Знайдіть область значень функції:


$$1) y = \arcsin \sqrt{x+4}; \quad 2) y = \frac{1}{\arcsin x}; \quad 3) y = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}}.$$


30.18.* Знайдіть область значень функції:

$$1) y = \arccos \sqrt{x+2}; \quad 2) y = \frac{1}{\arccos x}; \quad 3) y = \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}.$$

30.19.* Знайдіть область значень функції $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

30.20.* Знайдіть область значень функції $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

 30.21.* Доведіть, що при $|x| \leq 1$ виконується рівність $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

 30.22.* Доведіть, що при $|x| \leq 1$ виконується рівність $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

30.23.* Обчисліть значення виразу:

$$1) \cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right); \quad 2) \sin\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right); \quad 3) \cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8}\right).$$

30.24.* Обчисліть значення виразу:

$$1) \sin\left(\arccos \frac{1}{3}\right); \quad 3) \cos\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13}\right). \\ 2) \cos\left(2 \arccos \frac{4}{5}\right);$$

30.25.* Обчисліть значення виразу:

$$1) \sin(\operatorname{arctg} 2); \quad 2) \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arcctg} 3\right).$$

30.26.* Обчисліть значення виразу:

$$1) \sin(\operatorname{arctg} (-3)); \quad 2) \cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \arccos \frac{3}{5}\right).$$

30.27.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5; \\ 2) \sin(\arcsin(x + 2)) = x + 2.$$

30.28.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos(\arccos(4x - 1)) = 3x^2; \quad 2) \cos(\arccos(x - 1)) = x - 1.$$

30.29.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \arccos(2x - 1) > \frac{\pi}{3}; \quad 3) \arcsin(5 - 3x) < -\frac{\pi}{3}. \\ 2) \arcsin 2x > \frac{\pi}{6};$$

30.30.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \arccos(4x - 1) > \frac{3\pi}{4}; \quad 3) \arccos(4 - 7x) < \frac{5\pi}{6}. \\ 2) \arcsin(2 - 3x) < \frac{\pi}{4};$$

30.31.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \operatorname{arctg}(5x + 3) > -\frac{\pi}{3}; \quad 2) \operatorname{arcctg}(x - 2) < \frac{5\pi}{6}.$$

30.32.* Розв'яжіть нерівність $\operatorname{arcctg}(3x - 7) > \frac{2\pi}{3}$.

30.33.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sin(\arcsin x); \quad 3) y = \cos(2 \arcsin x); \\ 2) y = \cos(\arcsin x); \quad 4) y = \sin(\arcsin x + \arccos x).$$

30.34.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \cos(\arccos x)$;

3) $y = \cos(2 \arccos x)$;

2) $y = \sin(\arccos x)$;

4) $y = \cos(\arcsin x + \arccos x)$.

30.35.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;

2) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

30.36.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$;

2) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

30.37.** Побудуйте графік функції $y = \arccos(\cos x)$.

30.38.** Побудуйте графік функції $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

30.39.** Побудуйте графік функції $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$.

30.40.** Обчисліть значення виразу:

1) $\arcsin\left(\sin \frac{4\pi}{7}\right)$;

3) $\arcsin(\cos 8)$;

5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$;

2) $\arcsin(\sin 3)$;

4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{10\pi}{13}\right)$;

6) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{21}\right)$.

30.41.** Обчисліть значення виразу:

1) $\arccos\left(\cos \frac{11\pi}{9}\right)$;

3) $\arccos(\sin 12)$;

5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10)$.

2) $\arccos(\cos 6,28)$;

4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{15\pi}{11}\right)$;

30.42.* Розв'яжіть рівняння $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$.

30.43.* Розв'яжіть рівняння $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} x = -\frac{5\pi^2}{18}$.

30.44.* Доведіть, що $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}$.

30.45.* Доведіть, що $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

30.46. Ціну на деякий товар підвищили на 25 %. На скільки відсотків треба знизити нову ціну, щоб вона повернулася до початкового рівня?

30.47. Було 200 г 8-відсоткового розчину солі. Через деякий час 40 г води випарували. Яким став відсотковий вміст солі в розчині?

31. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних

У пунктах 27–29 ми отримали формули для розв’язування рівнянь виду $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Ці рівняння називають **найпростішими тригонометричними рівняннями**. За допомогою різних прийомів і методів багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

У цьому пункті розглянемо рівняння, які можна звести до найпростіших, увівши нову змінну та розв’язавши отримане алгебраїчне рівняння.

ПРИКЛАД 1 Розв’яжіть рівняння $2 \sin^2 x + \cos 4x - 2 = 0$.

Розв’язання. Можна записати: $1 - \cos 2x + 2 \cos^2 2x - 1 - 2 = 0$. Звідси $2 \cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0$. Зробимо заміну $\cos 2x = t$. Тоді останнє рівняння набуває вигляду $2t^2 - t - 2 = 0$. Розв’язавши його, отримуємо: $t_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$, $t_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$.

Оскільки $\frac{1 + \sqrt{17}}{4} > 1$, а $\frac{1 - \sqrt{17}}{4} \in [-1; 1]$, то початкове рівняння рівносильне рівнянню $\cos 2x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$, звідси

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{17}}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{17}}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◀

ПРИКЛАД 2 Розв’яжіть рівняння $\cos x + \sin x + \sin x \cos x = 1$.

Розв’язання. Нехай $\cos x + \sin x = t$. Тоді $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$; $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Дане в умові рівняння набуває вигляду $t + \frac{t^2 - 1}{2} = 1$. Звідси $t^2 + 2t - 3 = 0$; $t_1 = -3$, $t_2 = 1$.

З урахуванням заміни отримуємо сукупність рівнянь

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = -3, \\ \cos x + \sin x = 1. \end{cases}$$

Оскільки $|\cos x| \leq 1$ і $|\sin x| \leq 1$, то перше рівняння сукупності коренів не має.

Залишається розв'язати рівняння $\cos x + \sin x = 1$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad \begin{cases} x = 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$$

Відповідь: $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◀

Означення. Рівняння виду

$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$, де a_0, a_1, \dots, a_n — дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, $n \in \mathbb{N}$, називають **однорідним тригонометричним рівнянням n -го степеня** відносно $\sin x$ і $\cos x$.

З означення випливає, що суми показників степенів при $\sin x$ і $\cos x$ усіх доданків однорідного тригонометричного рівняння є рівними.

Наприклад, рівняння $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ — однорідне тригонометричне рівняння першого степеня, а рівняння $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$ і $2 \sin^2 x - \cos^2 x = 0$ — однорідні тригонометричні рівняння другого степеня.

Для однорідних рівнянь існує ефективний метод розв'язування. Ознайомимося з ним на прикладах.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння

$$7 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x - 15 \cos^2 x = 0.$$

Розв'язання. Якщо $\cos x = 0$, то з даного рівняння випливає, що $\sin x = 0$. Але $\sin x$ і $\cos x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, оскільки має місце рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел x , при яких $\cos x \neq 0$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{7 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{8 \sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{15 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$7 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 15 = 0.$$

$$\text{Звідси} \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{15}{7}; \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \operatorname{arctg} \frac{15}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} \frac{15}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◀

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $3 \sin^2 x + \sin 2x = 2$.

Розв'язання. Це рівняння не є однорідним. Проте його можна легко звести до однорідного:

$$3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Звідси

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

Отримали однорідне рівняння. Далі, діючи, як у попередньому прикладі, перейдемо до квадратного рівняння відносно $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◀

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $2 \sin x - 3 \cos x = 2$.

Розв'язання. Скористаємося формулами подвійного аргументу та основною тригонометричною тотожністю:

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right);$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◀

Рівняння прикладу 5 є окремим випадком рівняння виду

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad (1)$$

де a, b, c — деякі числа, відмінні від нуля.

Під час розв'язування рівнянь виду (1), крім методу, розглянутого в прикладі 5, можна використовувати такий прийом. Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то точка $P\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ належить одиничному колу.

Отже, існує такий кут φ , що $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тепер рівняння набуває вигляду

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Звідси $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Таким чином, отримали найпростіше тригонометричне рівняння.

ПРИКЛАД 6 При яких значеннях параметра a рівняння $\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right) \sin 3x + \frac{a}{2} = 0$ має на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ рівно: 1) два корені; 2) три корені?

Розв'язання. Розглянемо дане рівняння як квадратне відносно $\sin 3x$. Розв'язуючи його, отримаємо рівносильну сукупність рівнянь

$$\begin{cases} \sin 3x = \frac{1}{2}, \\ \sin 3x = a. \end{cases}$$

Перше рівняння сукупності має на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ рівно два корені. У цьому можна переконатися, знайшовши ці корені або використовуючи графічну інтерпретацію рівняння (рис. 31.1). Отже, для задачі 1) треба, щоб друге рівняння сукупності не давало нових коренів на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

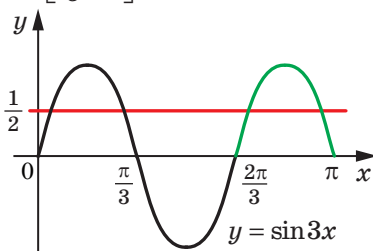


Рис. 31.1

При $a = \frac{1}{2}$ очевидно, що корені рівнянь сукупності збігаються.

При $a > 1$ або $a < 0$ рівняння $\sin 3x = a$ не має коренів на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. У цьому знов-таки можна перекоонатися, наприклад, використовуючи графічну інтерпретацію (рис. 31.1).

Для задачі 2) друге рівняння сукупності на розглядуваному проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ повинно додавати до множини всіх коренів тільки один корінь. Зрозуміло, що це буде виконуватися тільки при $a = 1$.

Відповідь: 1) $a > 1$, або $a < 0$, або $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 1$. ◀

ВПРАВИ

31.1.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$;
- 2) $4 \cos 2x - \sin 2x = 0$;
- 3) $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0$;
- 4) $3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

31.2.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$;
- 2) $2 \sin x + \cos x = 0$;
- 3) $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0$;
- 4) $4 \sin^2 x = 3 \sin x \cos x + \cos^2 x$.

31.3.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0$;
- 2) $2 \cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$;
- 3) $\cos \frac{2x}{3} - 5 \cos \frac{x}{3} - 2 = 0$;
- 4) $\cos 2x - \cos^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0$;
- 5) $8 \sin^2 3x + 4 \sin^2 6x = 5$;
- 6) $4 \operatorname{tg} 5x + 3 \operatorname{ctg} 5x = 7$;
- 7) $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$;
- 8) $2 \operatorname{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = 7$.

31.4.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $5 \sin \frac{x}{6} - \cos \frac{x}{3} + 3 = 0$;
- 2) $\cos x + \sin \frac{x}{2} = 0$;
- 3) $2 \cos^2 4x - 6 \cos^2 2x + 1 = 0$;
- 4) $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 3$;
- 5) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = \frac{3}{\cos^2 x}$;
- 6) $4 \sin^2 x + 9 \operatorname{ctg}^2 x = 6$.

31.5.* Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

31.6.* Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$$

31.7.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin^2 x + 0,5 \sin 2x - 2 \cos^2 x = 0$;
- 2) $5 \cos^2 x - 3 \sin^2 x - \sin 2x = 2$;
- 3) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 3$;
- 4) $3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1$.

31.8.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 \sin 2x = 0$;
- 2) $2 \cos^2 x + \sin 2x - 2 = 0$.

31.9.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4 \cos x \sin x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
- 2) $3 \cos x + 2 \operatorname{tg} x = 0$;
- 3) $3 + 5 \cos x = \sin^4 x - \cos^4 x$;
- 4) $\cos 2x - 9 \cos x + 6 = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$.

31.10.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4 \operatorname{ctg} x - 5 \sin x = 0$;
- 2) $4 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 2 \sin^2 x = 6$;
- 3) $7 + 2 \sin 2x + 1,5 (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$;
- 4) $2 \cos 4x - 2 \cos^2 x = 3 \cos 2x$.

31.11.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin^2 2x - \frac{1}{4} = \cos 2x \cos 6x$;
- 2) $2 \sin x \cos 3x = \cos^2 4x - \sin 2x + 1$.

31.12.* Розв'яжіть рівняння $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{3}{2}x + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$.

31.13.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3 \sin x - 8 \cos x = 3$;
- 2) $2 \sin x - 5 \cos x = 3$.

31.14.* Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \sin x + 5 \cos x = -3$; 2) $3\sqrt{3} \sin x - 5 \cos x = 7$.

31.15.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$;
2) $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,5$.

31.16.* Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12 \cos^4 x$;
2) $\cos^4 3x + \cos^4 \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

31.17.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$;
2) $18 \cos^2 x + 5(3 \cos x + \cos^{-1} x) + 2 \cos^{-2} x + 5 = 0$.

31.18.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^3 x = 4$;
2) $4 \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + 4 \sin x + \frac{2}{\sin x} = 11$.

31.19.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x + 2 \cos x = 0$; 2) $\sin 6x + 2 = 2 \cos 4x$.

31.20.** Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \sin \frac{x}{3} = \sin x$; 2) $\cos 3x - 1 = \cos 2x$.

31.21.** Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \cos x + 3 \sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$;
2) $\cos 4x = \cos^2 3x$;
3) $\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \cos^3 4x$.

31.22.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x + \sin 3x = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin 2x$;
2) $\cos 6x + 8 \cos 2x - 4 \cos 4x - 5 = 0$.

31.23.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{-\cos 2x} = -\sqrt{2} \cos x$;
2) $\sqrt{2 - 3 \cos 2x} = \sqrt{\sin x}$.

31.24.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{10 - 18 \cos x} = 6 \cos x - 2; \quad 2) \sqrt{3 + 4 \cos 2x} = \sqrt{2 \cos x}.$$

31.25.** Розв'яжіть рівняння $2 \sin 2x = 3 (\sin x + \cos x)$.

31.26.** Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + 5 (\sin x + \cos x) = 0$.

31.27.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin^3 x + \cos^3 x = 1; \quad 2) \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} + 2 \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 3.$$

31.28.** Розв'яжіть рівняння $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$.

31.29.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить рівно три корені рівняння:

$$1) 2 \sin^2 x - \sin x = 0; \quad 2) 2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0?$$

31.30.** Визначте, при яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить рівно n коренів рівняння:

$$1) 2 \sin^2 x + \sin x = 0, \quad n = 4; \quad 2) 2 \cos^2 x + \cos x = 0, \quad n = 3.$$

31.31.** Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin^2 x - \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x + \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ має на проміжку } \left[0; \frac{4\pi}{3}\right]: 1) \text{ два корені; } 2) \text{ три корені; } 3) \text{ не менше трьох коренів.}$$

31.32.** Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння

$$\cos^2 x - \left(a - \frac{1}{3}\right) \cos x - \frac{a}{3} = 0 \text{ має на проміжку } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right]: 1) \text{ два корені; } 2) \text{ три корені; } 3) \text{ не менше трьох коренів.}$$

31.33.* При яких значеннях параметра a рівняння $\sin x = 2 \sin^2 x$ і $\sin 3x = (a+1) \sin x - 2(a-1) \sin^2 x$ рівносильні?

31.34.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin 2x + a = \sin x + 2a \cos x \text{ і } 2 \cos 2x + a^2 = 5a \cos x - 2 \text{ рівносильні?}$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

31.35. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

$$1) x^6 - 3x^3 - 10 = 0; \quad 3) \frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5;$$

$$2) \sqrt{x+4} + 3\sqrt[4]{x+4} = 28; \quad 4) x^2 + x - \sqrt{x^2 + x - 2} = 8.$$

31.36. Дано функції $f(x) = x^{16}$ і $g(x) = x^{17}$. Розташуйте в порядку зростання $f(-5)$, $f(2)$, $g(1)$ і $g(-1)$.

32. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники. Застосування обмеженості тригонометричних функцій

Якщо права частина рівняння дорівнює нулю, а ліву частину вдалося розкласти на множники, то розв'язування цього рівняння можна звести до розв'язування кількох простіших рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sin 3x + 3 \sin 2x = 3 \sin x$.

Розв'язання. Застосувавши формули синуса подвійного та потрійного аргументів, отримуємо:

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + 6 \sin x \cos x = 3 \sin x.$$

$$\text{Звідси } 2 \sin x (3 \cos x - 2 \sin^2 x) = 0;$$

$$2 \sin x (3 \cos x - 2(1 - \cos^2 x)) = 0;$$

$$2 \sin x (2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2) = 0.$$

Переходимо до сукупності рівнянь
$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x = \pi n, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь: $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◀

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$(1 + \cos 2x) + \sin 2x + (\sin x + \cos x) = 0.$$

Тепер можна записати: $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + (\sin x + \cos x) = 0$;

$$2 \cos x (\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) = 0;$$

$$(2 \cos x + 1) (\sin x + \cos x) = 0.$$

Отримуємо сукупність рівнянь
$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x + \cos x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси} \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь: $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◀

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\cos \frac{x^2 - 8x}{5} = x^2 + 1$.

Розв'язання. Оскільки при будь-якому значенні x виконуються нерівності $\cos \frac{x^2 - 8x}{5} \leq 1$ і $x^2 + 1 \geq 1$, то коренями даного рівняння є ті значення змінної, при яких значення його лівої і правої частин одночасно дорівнюють 1. Отже, дане рівняння рівносильне

$$\text{системі} \begin{cases} \cos \frac{x^2 - 8x}{5} = 1, \\ x^2 + 1 = 1. \end{cases}$$

Друге рівняння системи має єдиний корінь $x = 0$. Він також задовольняє перше рівняння системи.

Відповідь: 0. ◀

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $x^2 - 2x \sin \frac{\pi x}{2} + 1 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо дане рівняння як квадратне відносно x . Оскільки для існування коренів рівняння дискримінант $D = 4 \sin^2 \frac{\pi x}{2} - 4$ має бути невід'ємним, то отримуємо: $\sin^2 \frac{\pi x}{2} \geq 1$.

Звідси $\sin \frac{\pi x}{2} = 1$ або $\sin \frac{\pi x}{2} = -1$. Тепер зрозуміло, що задане в умові рівняння рівносильне сукупності двох систем рівнянь:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi x}{2} = 1, \\ x^2 - 2x + 1 = 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi x}{2} = -1, \\ x^2 + 2x + 1 = 0. \end{array} \right. \end{cases}$$

Відповідь: 1; -1. ◀

ВПРАВИ

32.1.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 5x - \sin x = 0$;
- 2) $2 \sin x \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3} \sin x - \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

32.2.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\cos 9x - \cos x = 0$;
- 2) $\sqrt{2} \cos x \operatorname{ctg} x - 3\sqrt{2} \cos x + \operatorname{ctg} x - 3 = 0$.

32.3.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 5x = \cos 4x$;
- 2) $\sin 10x - \cos 2x = 0$.

32.4.° Розв'яжіть рівняння $\cos 5x + \sin 3x = 0$.

32.5.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 2x + 2 \sin x = \cos x + 1$;
- 2) $1 + \cos 8x = \cos 4x$;
- 3) $2 \sin 2x + \cos 3x - \cos x = 0$;
- 4) $\sin 4x + 2 \cos^2 x = 1$;
- 5) $\cos x - \cos 3x = 3 \sin^2 x$;
- 6) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

32.6.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 2x + 2 \sin x = 0$;
- 2) $\sin 2x - \cos x = 2 \sin x - 1$;
- 3) $1 - \cos 8x = \sin 4x$;
- 4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
- 5) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$;
- 6) $\sqrt{2} \cos 5x + \sin 3x - \sin 7x = 0$.

32.7.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3x}{2} = 1$;
- 2) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$;
- 3) $1 - \cos x = \operatorname{tg} x - \sin x$;
- 4) $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^2 x$;
- 5) $\cos 2x = \sqrt{2} (\cos x - \sin x)$;
- 6) $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 5x$.

32.8.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\cos^2 x - \sin^2 2x + \cos^2 3x = \frac{1}{2}$;
- 2) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$;
- 3) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;
- 4) $\sin 6x = 2 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2x \right)$.

32.9.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$;
- 2) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$;
- 3) $2 \cos (x + 20^\circ) \cos x = \cos 40^\circ$;
- 4) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$.

32.10.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0,5$;
- 2) $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$.

32.11.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2 \cos \frac{x^2 + 2x}{6} = x^2 + 4x + 6; \quad 2) 3 \cos x + 4 \sin x = x^2 - 6x + 14.$$

32.12.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5; \quad 2) \frac{2}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2 - x^2}.$$

32.13.* Розв'яжіть рівняння $4y^2 - 4y \cos x + 1 = 0$.

32.14.* Розв'яжіть рівняння $x^2 + 8x \sin(xy) + 16 = 0$.

32.15.* Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x + \cos y = \frac{3}{2}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

32.16.* Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y - x = 60^\circ, \\ \cos x + \cos y = 1,5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \sin x \cos y = -0,5, \\ \cos x \sin y = 0,5. \end{cases}$$

32.17.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin 7x - \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{3} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 5x = 0;$$

$$2) 2 \sin 3x + \sin x - \cos 2x = \sqrt{3} (\sin 2x - \cos x);$$

$$3) \sqrt{3} (2 - \cos x) + 4 \sin 2x = \sin x.$$

32.18.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos 3x - \sin x = -\sqrt{3} (\sin 3x - \cos x);$$

$$2) (\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 - 5 = \cos \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right).$$

32.19.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2 \cos^2 x - 2 \cos x;$$

$$2) (\cos x - \sin x)^2 - 0,5 \sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x.$$

32.20.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin^3 4x + \cos^3 4x = 1 - 0,5 \sin 8x;$$

$$2) \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} (\cos^4 2x - \sin^4 2x).$$

32.21.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos 2x + \cos \frac{5x}{2} = 2; \quad 2) \sin 6x + \cos \frac{12x}{5} = -2.$$

32.22.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos \frac{13x}{6} \cos \frac{5x}{6} = 1;$$

$$2) \sin 2x + \cos \frac{8x}{3} = 2.$$

32.23.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos^7 x + \sin^4 x = 1;$$

$$2) \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1.$$

32.24.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin^3 x + \cos^9 x = 1;$$

$$2) \cos^4 x - \sin^7 x = 1.$$

32.25.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x;$$

$$2) \sqrt{2 + \cos^2 2x} = \sin 3x - \cos 3x.$$

32.26.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin 5x + \sin x = 2 + \cos^2 x;$$

$$2) \sqrt{5 + \sin^2 3x} = \sin x + 2 \cos x.$$

32.27.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}} \sin \pi x - \cos \pi x = 2.$

32.28.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x} \cos \pi x + \sin \pi x = \sqrt{2}.$

32.29.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \left(5 + \frac{3}{\sin^2 x} \right) (2 - \sin^6 x) = 7 + \cos 2y;$$

$$2) \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2 (x + y).$$

32.30.* Розв'яжіть рівняння $(\sin (x - y) + 1)(2 \cos (2x - y) + 1) = 6.$

32.31.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$6a \cos \frac{\pi x}{2} - a^2 (1 + 6 |x|) + 7 = 0$$

має єдиний корінь?

32.32.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^2 - 2a \sin (\cos x) + 2 = 0$$

має єдиний корінь?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

32.33. Зливкок сплаву міді та цинку масою 36 кг містить 45 % міді. Скільки кілограмів міді потрібно додати до цього зливку, щоб отриманий новий сплав містив 60 % міді?

32.34. Є брухт сталі двох сортів із вмістом нікелю 5 % і 40 %. Скільки тонн брухту кожного сорту потрібно взяти, щоб отримати 140 т сталі з 30 %-м вмістом нікелю?



ПРО РІВНОСИЛЬНІ ПЕРЕХОДИ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

У попередніх пунктах ви ознайомилися з основними прийомами розв'язування тригонометричних рівнянь. Проте застосування кожного методу має свої «підводні рифи».



Рис. 32.1

Очевидно, що поза областю визначення рівняння коренів бути не може (рис. 32.1). Якщо під час перетворень рівняння відбувається розширення області його визначення, то зрозуміло, що це може призвести до появи сторонніх коренів. Цю небезпеку слід брати до уваги, розв'язуючи тригонометричні рівняння.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння

$$\frac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0.$$

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \\ \sin x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, що при парних значеннях k розв'язки першого рівняння сукупності не задовольняють систему. При $k = 2m - 1$, $m \in \mathbb{Z}$,

отримуємо: $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2m - 1) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\cos 2x} \cos x = 0$.

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \\ \cos 2x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ \cos 2x \geq 0. \end{cases}$$

При $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ маємо: $\cos 2x = \cos(\pi + 2\pi k) = -1 < 0$. При $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$

маємо: $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0 \geq 0$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. ◀

Ви знаєте, що множення обох частин рівняння на вираз зі змінною може змінити множину коренів початкового рівняння. Розглянемо приклад, коли таке перетворення призводить до появи сторонніх коренів.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $4 \cos x \cos 2x \cos 4x = \cos 7x$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на $\sin x$. Отримаємо рівняння-наслідок

$$4 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \cos 7x \sin x.$$

Звідси $\sin 8x = 2 \cos 7x \sin x$; $\sin 8x = \sin 8x - \sin 6x$; $\sin 6x = 0$;

$$x = \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки корені рівняння $\sin x = 0$ не є коренями даного в умові рівняння, то з отриманих розв'язків необхідно вилучити всі числа виду $x = \pi t, t \in \mathbb{Z}$. Маємо:

$$\frac{\pi k}{6} \neq \pi t, \text{ звідси } k \neq 6t.$$

Відповідь: $\frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 6t, t \in \mathbb{Z}$. ◀

У деяких тригонометричних тотожностях вирази, записані в лівих і правих частинах, мають різні області визначення. Наведемо кілька прикладів.

$$\hookrightarrow \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

Областю визначення лівої частини цієї тотожності є множина на \mathbb{R} , а правої — множина $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\hookrightarrow \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (2)$$

Областю визначення лівої частини тотожності (2) є множина $\{(\alpha; \beta) \mid \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$; областю визначення правої частини —

множина $\left\{(\alpha; \beta) \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Застосування цих формул справа наліво призводить до розширення області визначення рівняння, а отже, з'являється загроза появи сторонніх коренів.

Очевидно, що звуження області визначення рівняння — це загроза втрати коренів. Наприклад, застосування формул (1) і (2) зліва направо може привести до втрати коренів.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{16}{15} \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Застосувавши формули

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{і} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

дане рівняння зручно звести до алгебраїчного рівняння відносно $\operatorname{tg} x$. Проте такі перетворення звужують область визначення рівняння та призводять (у цьому нескладно переконатися) до втрати коренів виду $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Цей факт треба врахувати, записуючи відповідь.

Розв'язавши рівняння $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{16}{15 \operatorname{tg} x}$, отримаємо:
 $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◀

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = -1 - 5 \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Очевидно, що вигідно застосувати тотожність $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \operatorname{tg} x}$. Але при цьому область визначення рівняння звужиться на множину $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Легко переконатися, що числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, є коренями даного рівняння. Ураховуючи це, запишемо сукупність, рівносильну даному рівнянню:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \operatorname{tg} x} = -1 - \frac{5}{\operatorname{tg} x}. \end{array} \right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = -1 - \frac{5}{\operatorname{tg} x}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} x = \frac{5}{3}. \end{array} \right.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi k, \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. ◀

ВПРАВИ

32.35. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0;$

3) $\frac{8 \sin x \cos x \sin 2x - 1}{\sqrt{3} + 2 \sin 4x} = 0;$

2) $\frac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \cos x} = 0;$

4) $\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2 \cos x.$

32.36. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x}{1 - \cos x} = 0;$ 2) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x;$ 3) $\frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2 \sin x.$

32.37. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-2} \sin \pi x = 0;$

2) $\sqrt{25-4x^2} (3 \sin 2\pi x + 8 \sin \pi x) = 0.$

32.38. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3-x} \cos \pi x = 0;$

2) $\sqrt{49-4x^2} \left(\sin \pi x + 3 \cos \frac{\pi x}{2} \right) = 0.$

32.39. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos x - 4 \sin^2 x \cos x}{\sin 3x + 1} = 0;$

2) $\frac{\sin x + \cos 4x - 2}{2 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2}} = 0.$

32.40. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{\sin 3x - 1} = 0;$

2) $\frac{\cos x + \cos 3x + 2}{\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2}} = 0.$

32.41. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{\sin x \cos x} = 0; \quad 3) \sqrt{\cos x} (8 \sin x + 5 - 2 \cos 2x) = 0.$$

$$2) \sqrt{\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} \cos x} = 0;$$

32.42. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{\cos x \sin x} = 0; \quad 3) \sqrt{\sin x} (4 - 5 \cos x - 2 \sin^2 x) = 0.$$

$$2) \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x} = 0;$$

32.43. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16};$$

$$2) \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = -0,5.$$

32.44. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8} \cos 15x;$$

$$2) \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = -0,5.$$

32.45. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{tg} \left(2x + \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{ctg} 2x + \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 2) \frac{2 \operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} = -\sqrt{3}.$$

32.46. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{8}{3} \operatorname{ctg} x; \quad 3) 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + 5\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = -7.$$

$$2) \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \operatorname{ctg} 2x;$$

33. Тригонометричні нерівності

Нерівності виду $f(x) > a$, $f(x) < a$, де f — одна із чотирьох тригонометричних функцій, називають **найпростішими тригонометричними нерівностями**.

Підґрунтям для розв'язування цих нерівностей є таке наочне міркування: множиною розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$ є множина тих значень змінної x , при яких точки графіка функції f розміщені вище за відповідні точки графіка функції g (рис. 33.1). За допомогою цього рисунка встановлюємо, що проміжок $(a; b)$ — множина розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$.

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей проводитимемо за такою схемою: знайдемо розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції; усі інші розв'язки відрізняються від знайдених на Tn , де T — період даної функції, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

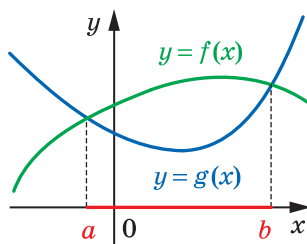


Рис. 33.1

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 33.2 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$. Оскільки $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то графіки перетинаються в точках з абсцисами $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ і $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + 2\pi\right]$ завдовжки в період функції $y = \sin x$.

На цьому проміжку графік функції $y = \sin x$ знаходиться вище за графік функції $y = \frac{1}{2}$ при $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ (рис. 33.2).

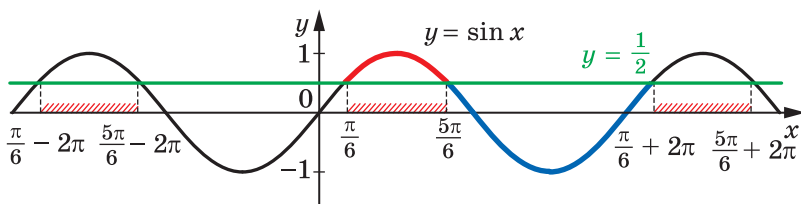


Рис. 33.2

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Таке об'єднання прийня-

то позначати так: $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

Відповідь записують одним із трьох способів:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або } \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right). \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + 2\pi \right]$, тобто на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right]$.

На розглядуваному проміжку графік функції $y = \sin x$ знаходиться нижче від графіка функції $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right)$ (рис. 33.3).

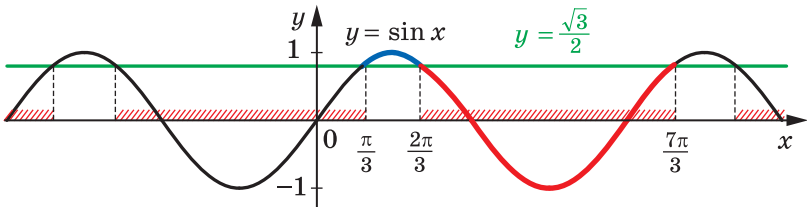


Рис. 33.3

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. \blacktriangleleft

У прикладах 1 і 2, розв'язуючи нерівності виду $\sin x > a$ і $\sin x < a$, ми розглядали проміжок виду $[\arcsin a; \arcsin a + 2\pi]$. Зрозуміло, що розв'язування можна провести, розглядаючи будь-який інший проміжок, довжина якого дорівнює 2π , наприклад проміжок $[-2\pi + \arcsin a; \arcsin a]$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}$. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left[-2\pi + \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$, тобто на проміжку $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$.

На цьому проміжку графік функції $y = \cos x$ розміщений вище за графік функції $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 33.4).

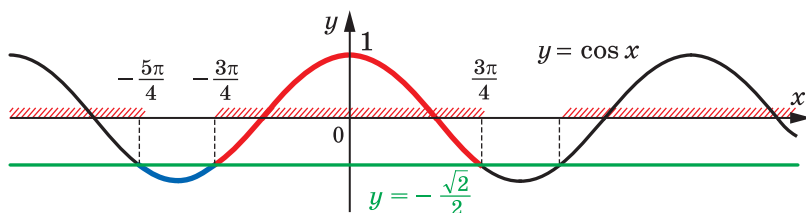


Рис. 33.4

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x < 1$.

Розв'язання

Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то на розглядуваному проміжку графік функції $y = \operatorname{tg} x$ розміщений нижче від графіка функції $y = 1$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ (рис. 33.5).

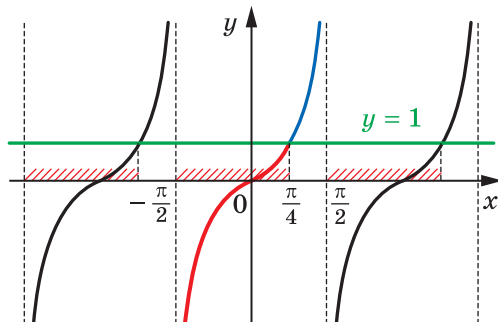


Рис. 33.5

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x \geq -\sqrt{3}$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $(0; \pi)$.

Оскільки $\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, то на розглядуваному проміжку графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ розміщений не нижче від графіка функції $y = -\sqrt{3}$ при $x \in \left(0; \frac{5\pi}{6}\right]$ (рис. 33.6).

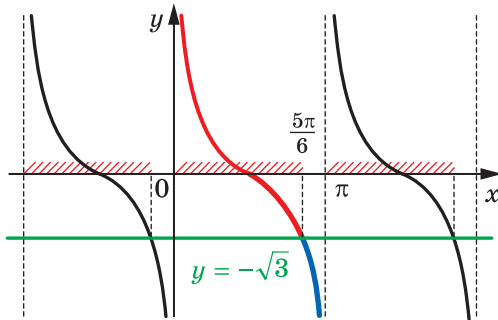


Рис. 33.6

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\pi n < x \leq \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей можна інтерпретувати за допомогою одиничного кола.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x < \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші від $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ і менші від $\frac{1}{2}$ (рис. 33.7).

Множина розв'язків даної нерівності — це множина таких чисел x , що точки $P_x = R_O^x(P_0)$ належать дузі AB або дузі CD .

Маємо:

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ і } \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Уявимо собі, що ми рухаємося по дугах AB і CD проти годинникової стрілки. Тоді

можна записати: $A = R_O^{\frac{\pi}{3}}(P_0)$, $B = R_O^{\frac{5\pi}{6}}(P_0)$,

$C = R_O^{\frac{7\pi}{6}}(P_0)$, $D = R_O^{\frac{5\pi}{3}}(P_0)$.

З урахуванням періодичності функції $y = \cos x$ переходимо до сукупності, яка рівносильна даній нерівності:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

або $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \blacktriangleleft$

У п. 5 ви ознайомилися з методом інтервалів для розв'язування раціональних нерівностей. Цей метод можна використовувати і для розв'язування тригонометричних нерівностей.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $\sin 2x + \sin x > 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sin 2x + \sin x$, $D(f) = \mathbb{R}$, яка є періодичною з періодом 2π .

Знайдемо нулі функції f на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Маємо: $\sin 2x + \sin x = 0$;

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0; \quad 2 \sin x \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi n, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

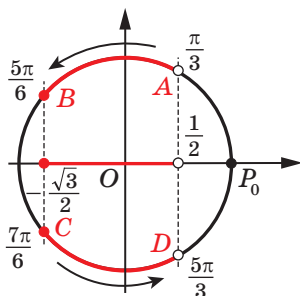


Рис. 33.7

На проміжку $[-\pi; \pi]$ функція f має п'ять нулів: $-\pi$, $-\frac{2\pi}{3}$, 0 , $\frac{2\pi}{3}$, π .

Ці числа розбивають указаний проміжок на проміжки знакосталості (рис. 33.8).

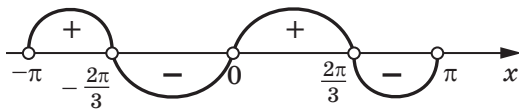


Рис. 33.8

Функція f набуває додатних значень на проміжках $\left(-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right)$ і $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

З урахуванням періодичності функції f запишемо відповідь.

Відповідь: $-\pi + 2\pi n < x < -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

або $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◀



1. Які нерівності називають найпростішими тригонометричними нерівностями?
2. За якою схемою розв'язують тригонометричні нерівності?

ВПРАВИ

33.1.° Розв'яжіть нерівність:

- | | | |
|--|--|---------------------------------|
| 1) $\sin x < \frac{1}{2}$; | 5) $\operatorname{tg} x < -1$; | 9) $\sin x < \frac{1}{6}$; |
| 2) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; | 6) $\operatorname{tg} x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$; | 10) $\operatorname{tg} x > 3$. |
| 3) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; | 7) $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$; | |
| 4) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 8) $\operatorname{ctg} x > -1$; | |

33.2.° Розв'яжіть нерівність:

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------|
| 1) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; | 2) $\sin x > -\frac{1}{2}$; |
|---------------------------------------|------------------------------|

- 3) $\cos x \leq \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$; 9) $\cos x > \frac{3}{5}$;
 4) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 10) $\operatorname{ctg} x < 2$.
 5) $\operatorname{tg} x \geq -1$; 8) $\operatorname{ctg} x \leq 1$;

33.3.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \sqrt{3}$; 4) $2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \leq \sqrt{3}$;
 2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$; 5) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > \frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $\sin(1 - 2x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

33.4.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$;
 2) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$;
 3) $2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) < 1$; 6) $\sin\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

33.5.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $-\frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{1}{4}$; 3) $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $|\operatorname{tg} x| > 2$.
 2) $-1 \leq \operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$; 4) $|\cos 3x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

33.6.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leq -\frac{1}{2}$; 4) $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}$;
 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < 1$; 5) $|\operatorname{ctg} x| > 5$.
 3) $|\sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

33.7.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geq \sqrt{3}$;
 2) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$.

33.8.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{5}{8}; \quad 2) \sin x \geq \cos x.$$

33.9.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 < 0;$$

$$2) \operatorname{tg}^2 x + (2 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0;$$

$$3) 2 \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 3 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) > -1;$$

$$4) \operatorname{tg} x \geq 2 \operatorname{ctg} x.$$

33.10.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 3 \geq 0; \quad 3) 4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x - 7 < 0;$$

$$2) \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x \geq 0; \quad 4) \frac{2}{\operatorname{tg} x + 1} < 2 - \operatorname{tg} x.$$

33.11.** Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sin 2x - \sin 3x > 0; \quad 3) 1 - \sin 2x \geq \cos x - \sin x;$$

$$2) \cos 2x \operatorname{tg} x > 0; \quad 4) \sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0.$$

33.12.** Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sin 2x + 2 \sin x > 0;$$

$$2) \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x < 0;$$

$$3) \sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x > 0;$$

$$4) \cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x.$$

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

33.13. Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}; \quad 3) f(x) = \frac{4x - 20}{x^2 - 5x};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x}; \quad 4) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}.$$



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Арккосинус, арксинус, арктангенс і арккотангенс

Арккосинусом числа b , де $|b| \leq 1$, називають таке число α з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює b .

Арксинусом числа b , де $|b| \leq 1$, називають таке число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b .

Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b .

Арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює b .

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\cos(\arccos x) = x$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

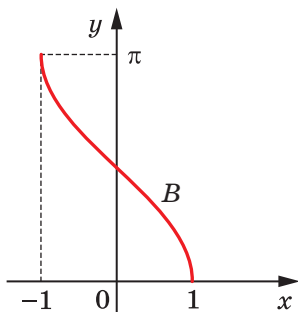
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

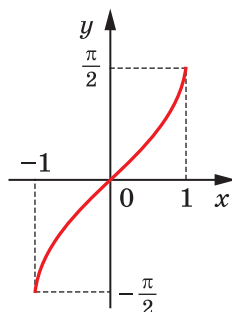
Формули коренів найпростіших тригонометричних рівнянь

Рівняння	Формула коренів
$\cos x = b$	$x = \pm \arccos b + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = b$	$x = (-1)^k \arcsin b + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = b$	$x = \operatorname{arcctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

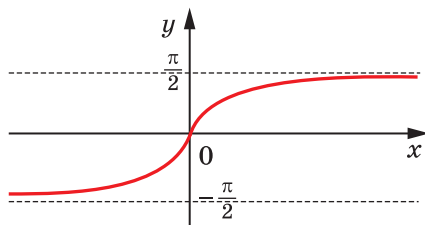
Функції $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \arctg x$ і $y = \operatorname{arccotg} x$



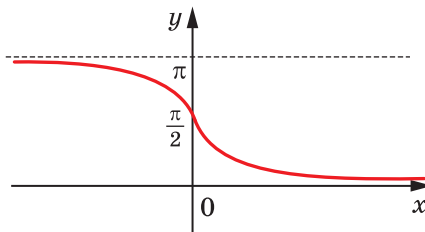
$$y = \arccos x$$



$$y = \arcsin x$$



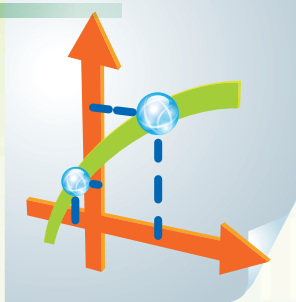
$$y = \arctg x$$



$$y = \operatorname{arccotg} x$$

§ 5

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ



- 34.** Означення границі функції в точці та функції, неперервної в точці
- 35.** Задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції
- 36.** Поняття похідної
- 37.** Правила обчислення похідних
- 38.** Рівняння дотичної
- 39.** Ознаки зростання і спадання функції
- 40.** Точки екстремуму функції
- 41.** Найбільше і найменше значення функції на відрізку
- 42.** Друга похідна. Поняття опуклості функції
- 43.** Побудова графіків функцій

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з такими поняттями, як границя функції в точці, неперервність функції в точці, похідна функції в точці.
- Ви навчитесь застосовувати похідну для дослідження властивостей функцій і побудови графіків функцій.



34. Означення границі функції в точці та функції, неперервної в точці

Розглянемо функцію $f(x) = x + 1$ і точку $x_0 = 1$. Якщо значення аргументу x прямують до числа 1 (позначають: $x \rightarrow 1$), то відповідні значення функції f прямують до числа 2 (позначають: $f(x) \rightarrow 2$) (рис. 34.1).

Іншими словами: якщо значення аргументу брати все ближче й ближче до числа 1, то відповідні значення функції f усе менше й менше відрізнятяться від числа 2.

У цьому разі говорять, що число 2 є **границею функції f у точці 1**, і записують:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

або

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Також використовують такий запис: $f(x) \rightarrow 2$ при $x \rightarrow 1$.

За допомогою рисунка 34.2 можна, наприклад, установити, що $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin x = -1.$$

Якщо звернутися до рисунка 34.3, то можна записати:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arccos x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \arccos x = \pi.$$

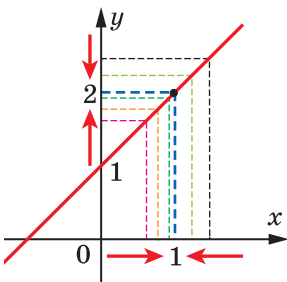


Рис. 34.1

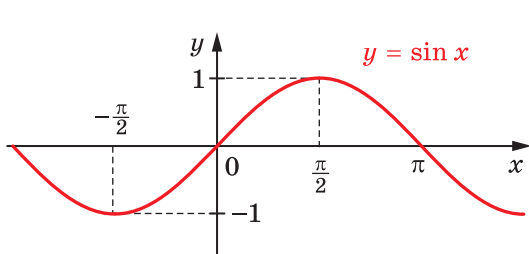


Рис. 34.2

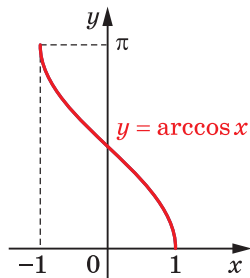


Рис. 34.3

На рисунку 34.4 зображено графік функції $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Ця функція не визначена в точці $x_0 = 1$, а в усіх інших точках збігається

з функцією $y = x + 1$ (порівняйте рис. 34.1 і рис. 34.4). Проте якщо значення аргументу x , де $x \neq 1$, прямують до числа 1, то відповідні значення функції $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ прямують до числа 2, тобто $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

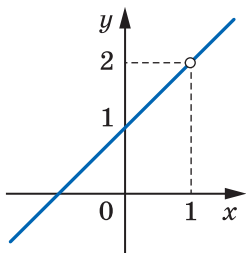


Рис. 34.4

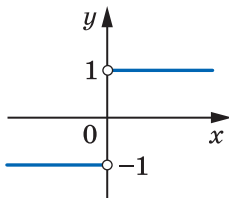


Рис. 34.5

Наведений приклад показує, що функція може бути не визначеною в точці, але мати границю в цій точці.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{|x|}{x}$. При $x > 0$ отримуємо $f(x) = 1$, при $x < 0$ отримуємо $f(x) = -1$. Графік функції f зображено на рисунку 34.5.

Якщо значення аргументу x , де $x \neq 0$, прямують до 0, то неможливо стверджувати, що значення функції f прямують до якогось певного числа. Справді, якщо значення аргументу прямують до нуля та є від'ємними, то відповідні значення функції прямують до -1 , а якщо значення аргументу прямують до нуля та є додатними, то відповідні значення функції прямують до 1.

Отже, функція $f(x) = \frac{|x|}{x}$ у точці $x_0 = 0$ не має границі.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (рис. 34.6). Якщо значення x , де $x \neq 0$, прямують до 0, то відповідні значення функції стають усе більшими й більшими та необмежено збільшуються. Це означає, що не існує числа, до якого прямують значення функції f за умови, що значення аргументу прямують до 0.

Отже, функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

Ми навели приклади двох функцій, які не визначені в деякій точці та не мають границі в цій точці.

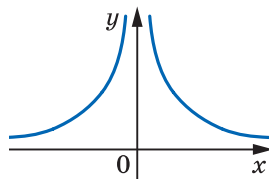


Рис. 34.6

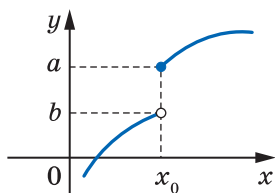


Рис. 34.7

Помилковим було б вважати, що коли функція визначена в деякій точці x_0 , то вона обов'язково має границю в цій точці. На рисунку 34.7 зображено графік функції f , яка визначена в точці x_0 , але не має границі в цій точці.

Ви отримали уявлення про границю функції в точці. Перейдемо до формування строгого означення.

Нехай дано функцію f і точку x_0 . Далі вважатимемо, що в будь-якому інтервалі¹, який містить точку x_0 , знайдуться точки області визначення функції f , відмінні від точки x_0 .

На рисунку 34.8 зображено графік функції f , яка має границю в точці x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Зазначимо, що $f(x_0) \neq a$.

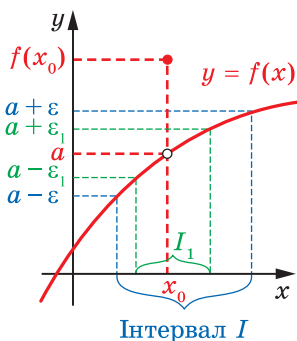


Рис. 34.8

Нехай ε — деяке додатне число. На осі ординат розглянемо інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. На осі абсцис йому відповідає такий інтервал I , який містить точку x_0 , що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, відповідні значення функції f належать проміжку $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, тобто виконуються нерівності $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Іншими словами, для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Звузимо проміжок на осі ординат, тобто розглянемо інтервал $(a - \varepsilon_1; a + \varepsilon_1)$, де $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тоді й для числа ε_1 можна вказати такий інтервал I_1 осі абсцис, який містить точку x_0 , що для будь-якого $x \in I_1 \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon_1$ (рис. 34.8).

¹ Проміжок виду $(a; b)$ називають *інтервалом*, а проміжок виду $[a; b]$ — *відрізком*.

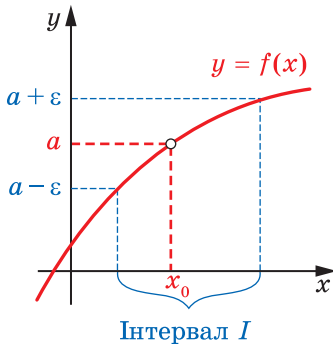


Рис. 34.9

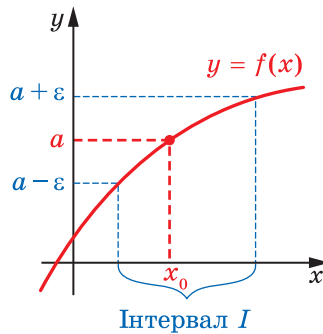


Рис. 34.10

На рисунку 34.9 зображено графік такої функції f , що $x_0 \notin D(f)$. Рисунок 34.10 відповідає функції f , для якої $f(x_0) = a$.

У кожному з випадків, зображених на рисунках 34.8–34.10, для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий інтервал I , який містить точку x_0 , що для всіх $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Наведені міркування дозволяють дати таке означення границі функції f у точці x_0 .

Означення. Число a називають **границею функції f у точці x_0** , якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий інтервал I , який містить точку x_0 , що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Зазначимо, що границя функції в точці x_0 характеризує значення функції навколо точки x_0 , тоді як поведінка функції в самій точці x_0 не впливає на значення границі (зверніть увагу на умову $x \neq x_0$ в означенні границі). Отже, для кожної з функцій f , графіки яких зображено на рисунках 34.8–34.10, можна записати:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

На рисунку 34.11 точка x_0 є такою, що праворуч (рис. 34.11, а, б) або ліворуч (рис. 34.11, в) від неї немає точок, які належать області визначення функції f . При цьому в кожному з випадків для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий інтервал I , який містить точку x_0 , що для всіх $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$. Це означає, що число a є границею функції f у точці x_0 .

Знаходити границю функції в точці допомагає така теорема. У ній розглядаються функції, які визначені в одних і тих самих точках деякого інтервалу, який містить точку x_0 .

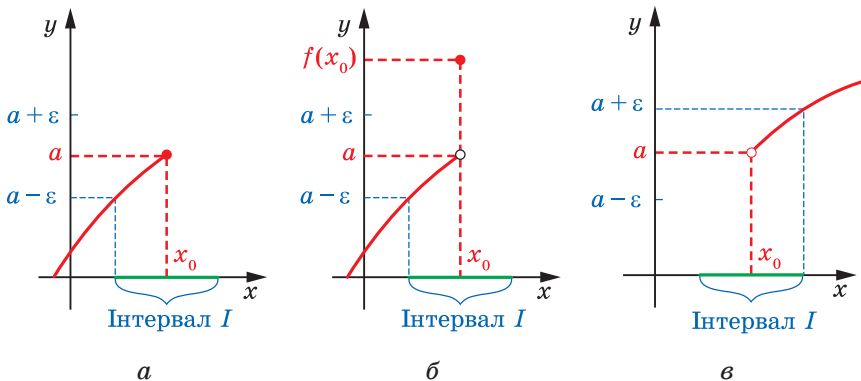


Рис. 34.11

Теорема 34.1 (про арифметичні дії з границями функцій). Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають границю в точці x_0 , то функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)g(x)$ також мають границю в точці x_0 , причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Якщо, крім цього, границя функції $y = g(x)$ у точці x_0 відмінна від нуля, то функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також має границю в точці x_0 і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Фактично теорема 34.1 складається із чотирьох теорем, які називають теоремами про границю суми, границю різниці, границю добутку та границю частки.

На рисунку 34.12 зображено графіки функцій f і g , які визначені в точці x_0 і мають границю в цій точці. Проте поведінка цих функцій у точці x_0 істотно різниться. Графік функції g , на відміну від графіка функції f , у точці x_0 має *розрив*. Таку відмінність у поведінці функцій f і g у точці x_0 можна охарактеризувати за допомогою границі.

Для функції g маємо: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$.

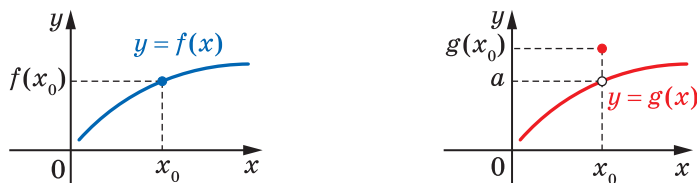


Рис. 34.12

Для функції f можна записати: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Іншими словами: *границя функції f у точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці*. У такому разі говорять, що **функція f є неперервною в точці x_0** .

Означення. Якщо виконується рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, то функцію f називають **неперервною в точці x_0** .

З рівності $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ випливає, що коли функція f не має границі в точці x_0 або не визначена в цій точці, то вона не може бути неперервною в точці x_0 .

Наприклад, функція, графік якої зображено на рисунку 34.13, не є неперервною в точці x_0 . Також не є неперервною в точці $x_0 = 0$ функція $y = \frac{x^2}{x}$ (рис. 34.14).

Якщо функція f є неперервною в кожній точці деякої множини $M \subset \mathbb{R}$, то говорять, що вона **неперервна на множині M** .

Якщо функція f є неперервною на $D(f)$, то таку функцію називають **неперервною**.

Наприклад, функція $y = x^2$ неперервна на \mathbb{R} , а функція $y = \frac{1}{x^2}$ є неперервною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, тобто ці функції є неперервними.

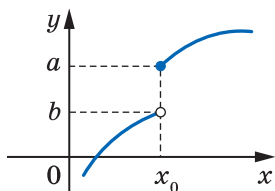


Рис. 34.13

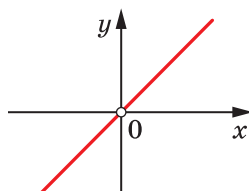


Рис. 34.14

Знаходити границю функції в точці та встановлювати неперервність функції в точці за допомогою означень цих понять — задачі трудомісткі. Часто полегшує розв'язування таких задач те, що більшість функцій, з якими ви маєте справу в шкільному курсі математики, є неперервними. Так, усі тригонометричні функції, обернені тригонометричні функції, степенева функція, раціональна функція¹ є неперервними.

Наприклад, на початку пункту з наочних міркувань було встановлено, що $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1} \arccos x = \pi$. Тепер

можна стверджувати, що справедливість цих рівностей впливає з неперервності функцій $y = \sin x$, $y = \arccos x$.

ПРИКЛАД Знайдіть: 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 1)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$.

Розв'язання. 1) Оскільки функція $y = 2x^2 + 3x - 1$ є неперервною в точці $x_0 = 1$, то її границя в цій точці дорівнює значенню функції в цій точці. Тоді $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 4$.

2) Маємо: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4)$. Оскільки лінійна функція $y = x + 4$ є неперервною, то $\lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8$. ◀



1. Що називають границею функції в точці?
2. Сформулюйте теореми про границю функції в точці.
3. Опишіть, яку функцію називають неперервною в точці; на множині.

ВПРАВИ

34.1.° Побудувавши графік функції f , з'ясуйте, чи має функція f границю в точці x_0 :

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$;

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 2$;

5) $f(x) = k$, де k — деяке число, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;

6) $f(x) = \frac{|x - 2|}{2 - x}$, $x_0 = 2$.

¹ Функцію виду $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени, називають раціональною.

34.2.° Побудувавши графік функції f , з'ясуйте, чи має функція f границю в точці x_0 :

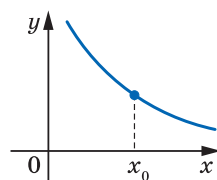
1) $f(x) = 2x + 1, x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}, x_0 = -3$;

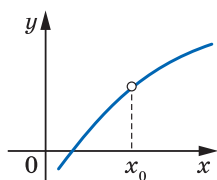
2) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}, x_0 = -1$;

4) $f(x) = \left| \frac{x - 1}{x - 1} \right|, x_0 = 1$.

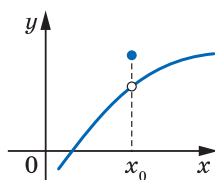
34.3.° За допомогою графіка функції f (рис. 34.15) з'ясуйте, чи має функція f границю в точці x_0 .



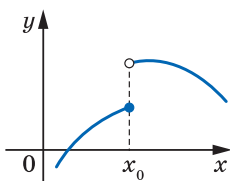
a



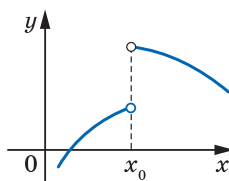
б



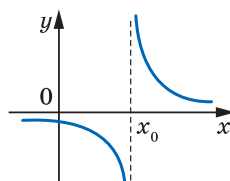
в



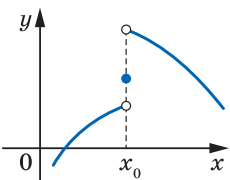
г



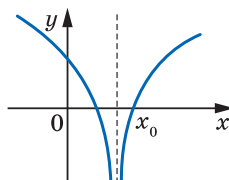
д



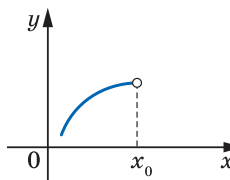
е



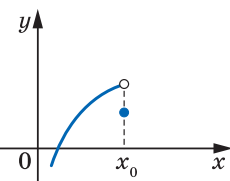
ж



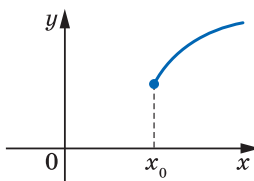
з



и



к

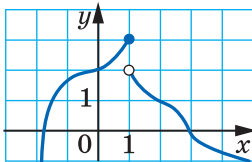


л

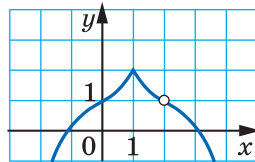
Рис. 34.15

34.4.° На рисунку 34.16 зображено графік функції $y = f(x)$.

- 1) Чому дорівнює значення функції f у точці $x_0 = 1$?
- 2) Чи існує границя функції f у точці $x_0 = 1$? У разі ствердної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює.
- 3) Чи існує границя функції f у точці $x_0 = 2$? У разі ствердної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює.



а



б

Рис. 34.16

34.5.° Використовуючи графік відповідної функції, перевірте справедливість рівності:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = -\frac{\pi}{6}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

34.6.° Використовуючи графік відповідної функції, перевірте справедливість рівності:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos x = \frac{\pi}{2}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x = 1$.

34.7.° Знайдіть:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x - 2)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + 2x - 1}$.

34.8.° Знайдіть:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 1}{(x - 2)^{20}}$.

34.9.° Обчисліть:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x - 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 3x$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{5}} \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{5} \right)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos^2 x$.

34.10.* Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-3x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos 4x$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

34.11.** Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

34.12.** Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} \right)$.

34.13.** Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$.

34.14.** Обчисліть:

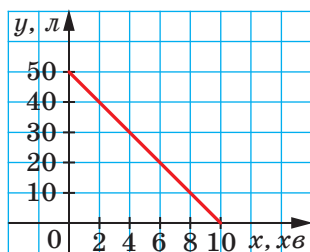
1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$;

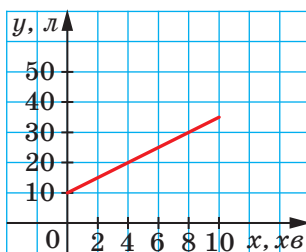
3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

34.15. Один із графіків, зображених на рисунку 34.17, відображає процес наповнення одного бака водою, а другий — витікання води з іншого бака. Задайте формулою залежність кількості води в кожному баку від часу.



а



б

Рис. 34.17

34.16. Яка з прямих, зображених на рисунку 34.18, є графіком функції:

1) $y = x$;

2) $y = 4x$;

3) $y = \frac{1}{4}x$;

4) $y = -\frac{1}{4}x$?

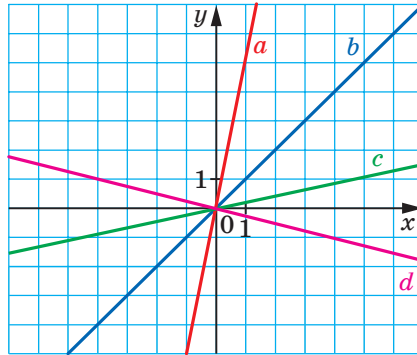


Рис. 34.18



ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Неперервні функції мають багато важливих властивостей. Розглянемо деякі з них.

Теорема 34.2 (перша теорема Больцано—Коші). *Якщо функція f є неперервною на відрізку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків, то існує така точка $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.*

Ця теорема є наочно очевидною. Справді, якщо точки A і B , які лежать у різних півплощинах відносно осі абсцис, сполучити неперервною кривою, то ця крива обов'язково перетне вісь абсцис (рис. 34.19).



Огюстен Луї Коші
(1789–1857)

Французький математик. Опублікував понад 800 робіт з арифметики, теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної та небесної механіки, математичної фізики; займався також дослідженнями з тригонометрії, теорії пружності, оптики, астрономії.

Був членом Паризької академії наук, Лондонського королівського товариства та майже всіх академій наук світу.

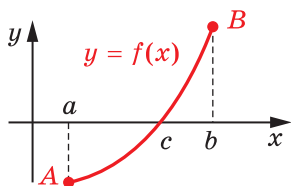


Рис. 34.19

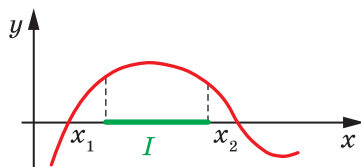


Рис. 34.20

Наслідок. Якщо функція неперервна та не має нулів на деякому проміжку I , то вона на цьому проміжку зберігає знак (рис. 34.20).

Доведення. Припустимо, що дана функція f на проміжку I не зберігає знака, тобто існують такі $a \in I$ і $b \in I$, де $a < b$, що числа $f(a)$ і $f(b)$ мають різні знаки (рис. 34.19). Тоді за першою теоремою Больцано—Коші існує точка $c \in (a; b) \subset I$ така, що $f(c) = 0$. Отримали суперечність. ◀

Нагадаємо, що цей наслідок лежить в основі методу інтервалів для розв'язування нерівностей.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що рівняння $x^5 + 2x^2 - 11 = 0$ має корінь.

Розв'язання. Розглянемо неперервну функцію $f(x) = x^5 + 2x^2 - 11$. Маємо: $f(0) = -11$, $f(2) = 29$. Отже, за першою теоремою Больцано—Коші на інтервалі $(0; 2)$ рівняння $f(x) = 0$ має корінь. ◀

Теорема 34.3 (друга теорема Больцано—Коші про проміжне значення функції). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона набуває всіх значень між $f(a)$ і $f(b)$.

Бернард Больцано
(1781–1848)

Чеський математик, філософ і логік. Очолював кафедру історії релігії в Празькому університеті. За життя надрукував, причому анонімно, лише п'ять невеликих математичних творів. Основну частину рукописної спадщини Больцано вчені досліджували вже після його смерті. Трактат «Учення про функції», написаний у 1830 р., побачив світ тільки через 100 років. У ньому Больцано, на багато років раніше від Вейерштрасса та Коші, сформулював і довів низку положень математичного аналізу. У роботі «Парадокси нескінченності» Больцано опрацьовував питання потужності нескінчених множин; у роботі «Наукознавство» висунув ідеї, які передували математичній логіці.



Доведення. Розглянемо випадок, коли $f(a) < f(b)$ (випадок, коли $f(a) \geq f(b)$, розгляньте самостійно).

Нехай C — довільне число з проміжку $(f(a); f(b))$, тобто $f(a) < C < f(b)$. Доведемо, що існує точка $x_0 \in (a; b)$, для якої $f(x_0) = C$. Тим самим буде показано, що функція f набуває значення C .

Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - C$. Функція g є неперервною на відрізку $[a; b]$.

Маємо: $g(a) = f(a) - C < 0$;

$g(b) = f(b) - C > 0$.

Отже, згідно з першою теоремою Больцано—Коші існує точка $x_0 \in (a; b)$ така, що $g(x_0) = 0$, тобто $f(x_0) - C = 0$; $f(x_0) = C$. ◀

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що рівняння $\sqrt[4]{1-x^4} - 2x = \sqrt{3}$ має корінь.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[4]{1-x^4} - 2x$. Вона є неперервною на $D(f) = [-1; 1]$. Маємо: $f(-1) = 2$ і $f(1) = -2$. Оскільки $\sqrt{3} \in [-2; 2]$, то за другою теоремою Больцано—Коші про проміжне значення функції знайдеться таке число $x \in D(f)$, що $f(x) = \sqrt{3}$. ◀

Друга теорема Больцано—Коші допомагає знаходити область значень неперервної функції.

Наслідок. Якщо область визначення неперервної функції f є деякий проміжок, $\min_{D(f)} f(x) = a$, $\max_{D(f)} f(x) = b$ і $a \neq b$, то $E(f) = [a; b]$.

Доведіть цей наслідок самостійно.

Цим наслідком ми нерідко користувалися, знаходячи, наприклад, області значень функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$.

Функція $f(x) = \sin x$ є такою, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $|\sin x| \leq 1$. Функція $g(x) = x^2$ є такою, що для будь-якого $x \in [-1; 2]$ виконується нерівність $|g(x)| < 5$. Говорять, що функція f обмежена на $D(f)$, а функція g обмежена на відрізку $[-1; 2]$.

Узагалі, функцію f називають обмеженою на множині M , якщо існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C$.

Функцію f , обмежену на $D(f)$, називають **обмеженою**.

Наприклад, функція $y = \operatorname{arctg} x$ є обмеженою. Справді, для будь-якого $x \in D(y)$ виконується нерівність $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$.

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ не є обмеженою на проміжку $(0; \pi)$. При цьому вона є обмеженою на будь-якому відрізку $[a; b]$, який належить проміжку $(0; \pi)$ (рис. 34.21).

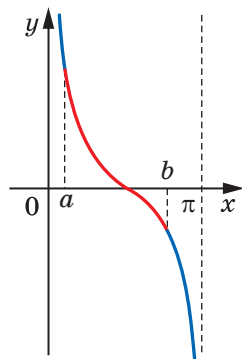


Рис. 34.21

Теорема 34.4 (перша теорема Вейєрштрасса). *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона є обмеженою на цьому відрізку.*

Зауважимо, що для проміжків виду $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ твердження теореми не є справедливим. Так, функція

$y = \frac{1}{x}$ є неперервною на будь-якому проміжку виду $(0; a]$, однак вона не є обмеженою на цьому проміжку.

Не будь-яка функція, визначена й обмежена на відрізку $[a; b]$, досягає на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень. Це ілюструє рисунок 34.22.

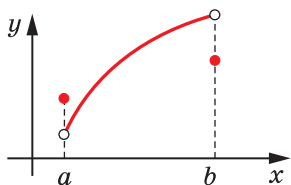


Рис. 34.22

Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс (1815–1897)

Німецький математик, член Берлінської академії наук, Паризької академії наук, почесний член Петербурзької академії наук.

Одним із найважливіших його здобутків є система логічного обґрунтування математичного аналізу, заснована на побудованій ним теорії дійсних чисел.

Вейєрштрасс приділяв велику увагу застосуванню математики в механіці та фізиці й захоплювався до цього своїх учнів.



Проте для неперервних функцій справедлива така теорема.

Теорема 34.5 (друга теорема Вейерштрасса). *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку вона набуває найбільшого і найменшого значень.*

Ця теорема наочно очевидна. Якщо дві точки на координатній площині сполучити неперервною кривою, то на цій кривій знайдуться точки з найбільшою і найменшою ординатами (рис. 34.23). Доведення цієї теореми виходить за межі шкільного курсу.

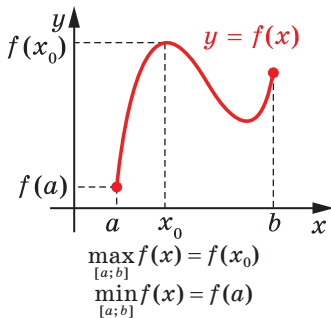


Рис. 34.23

Зазначимо, що коли в теоремі 34.5 відрізок $[a; b]$ замінити проміжком іншого виду, наприклад інтервалом $(a; b)$, то неперервна на цьому проміжку функція може не набувати найбільшого і найменшого значень. Так, функція $y = x$, яка є неперервною на проміжку $(0; 1)$, не досягає на ньому найбільшого і найменшого значень.

35. Задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції

Якщо функція є математичною моделлю реального процесу, то часто виникає потреба знаходити різницю значень цієї функції у двох точках. Наприклад, позначимо через $f(t)$ і $f(t_0)$ суми коштів, які накопичилися на депозитному¹ рахунку вкладника до моментів часу t і t_0 . Тоді різниця $f(t) - f(t_0)$, де $t > t_0$, показує прибуток, який отримає вкладник за час $t - t_0$.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 — фіксована точка з області визначення функції f .

Якщо x — довільна точка області визначення функції f така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають **приростом аргументу функції f у точці x_0** і позначають Δx (читають: «дельта ікс»)². Маємо:

$$\Delta x = x - x_0.$$

¹ Депозит (банківський вклад) — кошти, які вкладник передає банку на деякий строк, за що банк виплачує вкладнику проценти.

² Говорячи про приріст аргументу функції f у точці x_0 , тут і далі припустимо, що в будь-якому інтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ є точки області визначення функції f , відмінні від x_0 .

Звідси

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Говорять, що аргумент **отримав приріст** Δx у точці x_0 .

Зазначимо, що приріст аргументу може бути як додатним, так і від'ємним: якщо $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; якщо $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Якщо аргумент у точці x_0 отримав приріст Δx , то значення функції f змінилося на величину

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Цю різницю називають **приростом функції f у точці x_0** і позначають Δf (читають: «дельта еф»). Маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ або}$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Для приросту функції $y = f(x)$ прийнято також позначення Δy , тобто

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ або } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приріст Δx аргументу в точці x_0 і відповідний приріст Δf функції показано на рисунку 35.1.

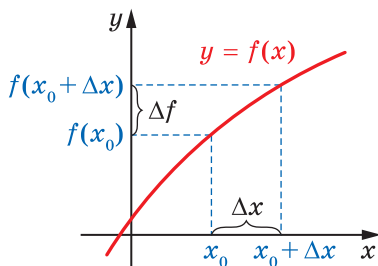


Рис. 35.1

Зауважимо, що для фіксованої точки x_0 приріст функції f у точці x_0 є функцією з аргументом Δx .

ПРИКЛАД 1 Знайдіть приріст функції $y = x^2$ у точці x_0 , який відповідає приросту Δx аргументу.

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Відповідь: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$. ◀

Задача про миттєву швидкість

Нехай автомобіль, рухаючись прямолінійною ділянкою дороги в одному напрямку, за 2 год подолав шлях у 120 км. Тоді його

середня швидкість руху дорівнює $v_{\text{сєр}} = \frac{120}{2} = 60$ (км/год).

Знайдена величина дає неповне уявлення про характер руху автомобіля: на одних ділянках шляху автомобіль міг пересуватися швидше, на інших — повільніше, інколи міг зупинятися.

Разом із цим у будь-який момент часу спідометр автомобіля показував деяку величину — швидкість у даний момент часу. Значення швидкості в різні моменти повніше характеризує рух автомобіля.

Розглянемо задачу про пошук швидкості в даний момент часу на прикладі рівноприскореного руху.

Нехай матеріальна точка рухається по координатній прямій і через час t після початку руху має координату $s(t)$. Тим самим задано функцію $y = s(t)$, яка дає змогу визначити положення точки в будь-який момент часу. Тому цю функцію називають **законом руху точки**.

Наприклад, із курсу фізики відомо, що закон рівноприскореного руху задається формулою $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, де s_0 — координата точки на початку руху (при $t = 0$), v_0 — початкова швидкість, a — прискорення.

Нехай, наприклад, $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с². Тоді $s(t) = t^2 + t$.

Зафіксуємо який-небудь момент часу t_0 і надамо аргументу в точці t_0 приріст Δt , тобто розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу матеріальна точка здійснить переміщення Δs . Маємо:

$$\begin{aligned} \Delta s &= s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0 + \Delta t)} - \underbrace{(t_0^2 + t_0)}_{s(t_0)} = \\ &= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2. \end{aligned}$$

Середня швидкість $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ руху точки за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ дорівнює відношенню $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Отримуємо:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ тобто } v_{\text{сер}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Позначення для середньої швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ наголошує, що при заданому законі руху $y = s(t)$ і фіксованому моменті часу t_0 значення середньої швидкості залежить тільки від Δt .

Якщо розглядати досить малі проміжки часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$, то з практичних міркувань зрозуміло, що середні швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ за такі проміжки часу мало відрізняються одна від одної, тобто величина $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ майже не змінюється. Чим менше Δt , тим ближчим є значення середньої швидкості до деякого числа, що визначає швидкість у момент часу t_0 . Іншими словами, якщо при $\Delta t \rightarrow 0$

значення $v_{\text{сеп}}(\Delta t)$ прямують до числа $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ називають **миттєвою швидкістю** в момент часу t_0 .

Якщо в наведеному прикладі $\Delta t \rightarrow 0$, то значення виразу $2t_0 + 1 + \Delta t$ прямують до числа $2t_0 + 1$, яке є значенням миттєвої швидкості $v(t_0)$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Цей приклад показує, що коли матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$, то її миттєву швидкість у момент часу t_0 визначають за допомогою формули

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{сеп}}(\Delta t), \text{ тобто}$$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Задача про дотичну до графіка функції

Відоме означення дотичної до кола як прямої, що має з колом тільки одну спільну точку, незастосовне у випадку довільної кривої.

Наприклад, вісь ординат має з параболою $y = x^2$ тільки одну спільну точку (рис. 35.2). Проте інтуїція підказує, що неприродно вважати цю пряму дотичною до цієї параболи. Разом з тим у курсі алгебри ми нерідко казали, що парабола $y = x^2$ дотикається до осі абсцис у точці $x_0 = 0$.

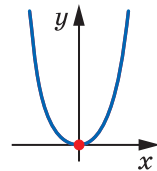


Рис. 35.2

Уточнимо наочне уявлення про дотичну до графіка функції.

Нехай M — деяка точка, що лежить на параболі $y = x^2$. Проведемо пряму OM , яку назвемо січною (рис. 35.3). Уявимо собі, що точка M , рухаючись по параболі, наближається до точки O . При цьому січна OM буде повертатися навколо точки O . Тоді кут між прямою OM та віссю абсцис ставатиме все меншим і меншим, а січна OM прагнучиме зайняти положення осі абсцис. Пряму, положення якої прагне зайняти січна OM з наближенням точки M до точки O , називатимемо дотичною до параболи $y = x^2$ у точці O .

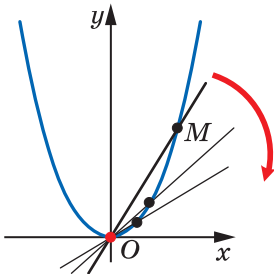


Рис. 35.3

Розглянемо графік деякої неперервної в точці x_0 функції f і точку $M_0(x_0; f(x_0))$.

У точці x_0 надамо аргументу приріст Δx і розглянемо на графіку точку $M(x; f(x))$, де $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 35.4).

З рисунка видно, що коли Δx стає все менше й менше, то точка M , рухаючись по графіку, наближається до точки M_0 . Якщо при $\Delta x \rightarrow 0$ січна M_0M прагне зайняти положення деякої прямої (на рисунку 35.4 це пряма M_0T), то таку пряму називають **дотичною до графіка функції f у точці M_0** .

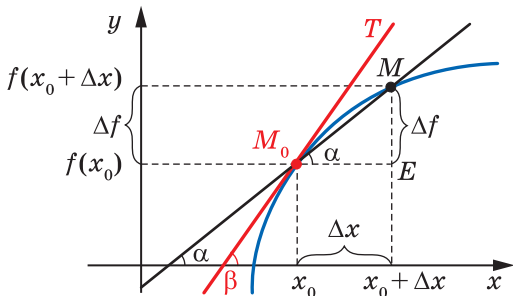


Рис. 35.4

Нехай січна M_0M має рівняння $y = kx + b$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α . Як відомо, кутовий коефіцієнт k прямої M_0M дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$, тобто $k = \operatorname{tg} \alpha$. Очевидно, що $\angle M M_0 E = \alpha$ (рис. 35.4). Тоді з трикутника $M M_0 E$ отримуємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Уведемо позначення $k_{\text{січ}}(\Delta x)$ для кутового коефіцієнта січної M_0M , тим самим підкреслюючи, що для даної функції f і фіксованої точки x_0 кутовий коефіцієнт січної M_0M залежить від приросту Δx аргументу.

$$\text{Маємо: } k_{\text{січ}}(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Нехай дотична M_0T утворює з додатним напрямом осі абсцис кут β ($\beta \neq 90^\circ$). Тоді її кутовий коефіцієнт $k(x_0)$ дорівнює $\operatorname{tg} \beta$.

Природно вважати, що чим менше Δx , то тим менше значення кутового коефіцієнта січної відрізняється від значення кутового коефіцієнта дотичної. Іншими словами, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $k_{\text{січ}}(\Delta x) \rightarrow k(x_0)$.

Узагалі, кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 визначають за допомогою формули

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{січ}}(\Delta x), \text{ тобто}$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть формулу для обчислення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2$ у точці з абсцисою x_0 . Який кут з додатним напрямом осі абсцис утворює дотична, проведена до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$?

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 - (-x_0^2) = -2x_0\Delta x - \Delta x^2.$$

Тоді, скориставшись формулою для обчислення кутового коефіцієнта дотичної, можна записати:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2x_0 - \Delta x).$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то значення виразу $-2x_0 - \Delta x$ прямують до числа $-2x_0$, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2x_0 - \Delta x) = -2x_0$. Звідси $k(x_0) = -2x_0$.

Ця формула дає змогу обчислити кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = -x^2$ у будь-якій точці, зокрема в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Маємо: } k\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Нехай дотична до параболи в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$ утворює кут α ($0 \leq \alpha < \pi$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) з додатним напрямом осі абсцис. Тоді її кутовий коефіцієнт дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$. Вище ми встановили, що $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Звідси $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Оскільки

$0 \leq \alpha < \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (рис. 35.5). ◀

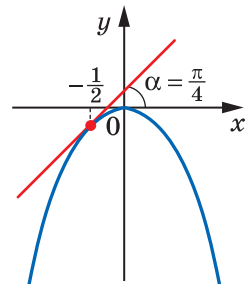


Рис. 35.5



1. Що називають приростом аргументу в точці? приростом функції в точці?
2. Опишіть, що називають миттєвою швидкістю.
3. Опишіть, що називають дотичною до графіка функції.

ВПРАВИ

35.1.° Знайдіть приріст функції f у точці x_0 , якщо:

1) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$;

2) $f(x) = \frac{6}{x}$, $x_0 = 1,2$, $\Delta x = -0,3$.

35.2.° Знайдіть приріст функції f у точці x_0 , якщо:

1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,3$;

2) $f(x) = 0,5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,8$.

35.3.° Для функції $f(x) = x^2 - 3x$ виразіть приріст Δf функції f у точці x_0 через x_0 і x . Знайдіть Δf , якщо:

1) $x_0 = 3$, $x = 2,5$;

2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

35.4.° Для функції $f(x) = x^3$ виразіть приріст Δf функції f у точці x_0 через x_0 і x . Знайдіть Δf , якщо $x_0 = 0,5$, $x = 0,4$.

35.5.* Для функції $f(x) = x^2 - x$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

35.6.* Для функції $f(x) = 5x + 1$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

35.7.* Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 + 3$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент $t_0 = 2$ с.

35.8.* Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 5t^2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть:

1) середню швидкість тіла при зміні часу від $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с;

2) миттєву швидкість тіла в момент $t_0 = 1$ с.

35.9.* Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y = x^2$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 1$ і $x_1 = 1,6$;

2) дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

35.10.* Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y = x^3$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 2$ і $x_1 = 1$;

2) дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

35.11. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^3} - \sqrt{a}}$;

2) $\frac{\sqrt[4]{m^2n} + 3\sqrt[4]{mn^2}}{\sqrt{m} + 6\sqrt[4]{mn} + 9\sqrt{n}}$;

3) $\frac{a + 8}{\sqrt[3]{a^2} - 4}$.

35.12. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^2} \leq 0; \quad 2) \frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8} \geq 0; \quad 3) \frac{(x+1)(x-3)^2}{x+4} \leq 0.$$

36. Поняття похідної

У попередньому пункті, розв'язуючи дві різні задачі про миттєву швидкість матеріальної точки та про кутовий коефіцієнт дотичної, ми дійшли до однієї і тієї самої математичної моделі — границі відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

До аналогічних формул приводить розв'язування багатьох задач фізики, хімії, біології, економіки тощо. Це свідчить про те, що розглядувана модель заслуговує на особливу увагу. Її варто дати назву, увести позначення, вивчити її властивості та навчитися їх застосовувати.

Означення. **Похідною функції f у точці x_0** називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f'(x_0)$ (читають: «еф штрих від ікс нульового») або $y'(x_0)$. Можна записати:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

або

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Похідну функції f у точці x_0 можна обчислити за такою схемою:

1) надавши в точці x_0 аргументу приріст Δx , знайти відповідний приріст Δf функції:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

- 2) знайти відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
 3) з'ясувати, до якого числа прямує відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$,
 тобто знайти границю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Дотримуючись наведеної схеми, запишемо:

$$1) \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1 + \Delta x} - \frac{1}{1} = \frac{-\Delta x}{1 + \Delta x};$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{1}{1 + \Delta x};$$

3) при $\Delta x \rightarrow 0$ значення виразу $-\frac{1}{1 + \Delta x}$ прямують до числа -1 ,
 тобто $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1 + \Delta x} \right) = -1$.

Відповідь: -1 . ◀

Зазначимо, що, знайшовши значення $f'(1)$, ми тим самим знайшли кутівий коефіцієнт $k(x_0)$ дотичної, проведеної до графіка

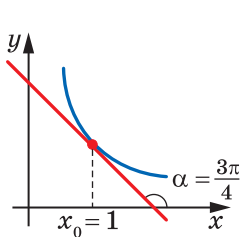


Рис. 36.1

функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$. Він дорівнює -1 , тобто $k(1) = -1$. Тоді, позначивши через α кут, утворений цією дотичною з додатним напрямом осі абсцис, можемо записати: $\operatorname{tg} \alpha = -1$. Звідси $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ (рис. 36.1).

Узагалі, можна зробити такий висновок: *кутівий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , дорівнює значенню похідної функції f у точці x_0 , тобто*

$$k(x_0) = f'(x_0)$$

Ця рівність виражає **геометричний зміст похідної**.

Зважаючи на означення миттєвої швидкості, можна зробити такий висновок: *якщо $y = s(t)$ — закон руху матеріальної точки по координатній прямій, то її миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює значенню похідної функції $y = s(t)$ у точці t_0 , тобто*

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

Ця рівність виражає **механічний зміст похідної**.

Якщо функція f має похідну в точці x_0 , то цю функцію називають **диференційовною в точці x_0** .

Нехай функція f є диференційовною в точці x_0 . З геометричного змісту похідної випливає, що до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести *невертикальну* дотичну (рис. 36.2). І навпаки, якщо до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну, то функція f є диференційовною в точці x_0 .

На рисунку 36.3 зображено графіки функцій, які в точці x_0 мають розрив або «злом». До цих графіків у точці з абсцисою x_0 не можна провести дотичну. Ці функції не диференційовні в точці x_0 .

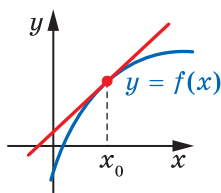


Рис. 36.2

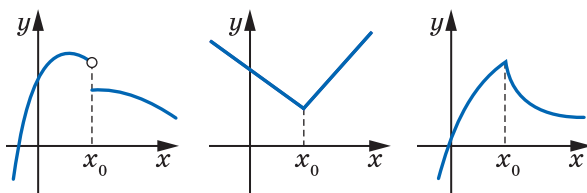


Рис. 36.3

На рисунку 36.4 зображено графіки функцій, які в точці з абсцисою x_0 мають вертикальну дотичну. Отже, ці функції не диференційовні в точці x_0 .



Рис. 36.4

Покажемо, наприклад, що функція $f(x) = |x|$, графік якої має «злом» у точці $x_0 = 0$, не є диференційовною в цій точці. Маємо:

$$1) \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x};$$

3) у п. 34 було показано, що функція $f(x) = \frac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$; це означає, що не існує границі $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, тобто функція f не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Теорема 36.1. Якщо функція f є диференційовною в точці x_0 , то вона є неперервною в цій точці.

Доведення. Оскільки функція f диференційовна в точці x_0 , то можна записати: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Маємо: $\Delta x = x - x_0$. Очевидно, що коли $\Delta x \rightarrow 0$, то $x \rightarrow x_0$. Тоді

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Звідси $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Це означає, що функція f є неперервною в точці x_0 . ◀

Зазначимо, що неперервна в точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = |x|$ не є диференційовною в цій точці. Цей приклад показує, що неперервність функції в точці є необхідною, але не є достатньою умовою диференційовності функції в цій точці (рис. 36.5).

Нехай M — множина точок, у яких функція f диференційовна. Кожному числу $x \in M$ поставимо у відповідність число $f'(x)$. Таке правило задає функцію з областю визначення M . Цю функцію називають **похідною функції** $y = f'(x)$ і позначають f' або y' .

Якщо функція f диференційовна в кожній точці деякої множини M , то говорять, що вона **диференційовна на множині** M . Наприклад, на рисунку 36.6 зображено графік функції, диференційовної на інтервалі I . На інтервалі I цей графік не має розривів і «зломів».



Рис. 36.5

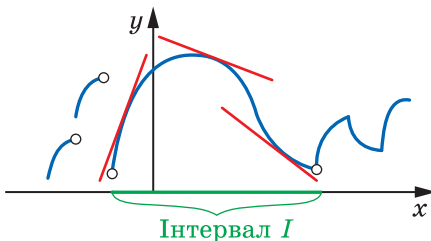


Рис. 36.6

Якщо функція f диференційовна на $D(f)$, то її називають **диференційовною**.

Знаходження похідної функції f називають **диференціюванням** функції f .

ПРИКЛАД 2 Продиференціюйте функцію $f(x) = kx + b$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0 , де x_0 — довільна точка області визначення функції f .

$$1) \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k;$$

$$3) \text{ за означенням похідної } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k.$$

Отже, $f'(x_0) = k$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f , то остання рівність означає, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f'(x) = k$. ◀

Висновок про те, що похідна лінійної функції $f(x) = kx + b$ дорівнює k , записують також у вигляді

$$(kx + b)' = k \quad (1)$$

Якщо у формулу (1) підставити $k = 1$ і $b = 0$, то отримаємо:

$$(x)' = 1$$

Якщо ж у формулі (1) покласти $k = 0$, то отримаємо:

$$(b)' = 0$$

Ця рівність означає, що похідна функції, яка є константою, у кожній точці дорівнює нулю.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0 , де x_0 — довільна точка області визначення функції f .

$$1) \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x;$$

3) якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}$ значення виразу $2x_0 + \Delta x$ прямують до числа $2x_0$. Отже, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 2x. \quad \blacktriangleleft$$

Останню рівність записують також у вигляді

$$(x^2)' = 2x \quad (2)$$

ПРИКЛАД 4 Знайдіть похідну функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0 , де x_0 — довільна точка області визначення функції f .

$$\begin{aligned} 1) \Delta f &= (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = \\ &= (x_0 + \Delta x - x_0)((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2) = \\ &= \Delta x((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{\Delta x((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2)}{\Delta x} = \\ &= (x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2; \end{aligned}$$

3) якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то значення виразу $(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2$ прямує до числа $3x_0^2$. Отже, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f , то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 3x^2. \quad \blacktriangleleft$$

Отриману рівність можна записати так:

$$(x^3)' = 3x^2 \quad (3)$$

Формули (2) і (3) є окремими випадками більш загальної формули

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1 \quad (4)$$

Наприклад, $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

Формула (4) залишається справедливою для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$ і $x \neq 0$, тобто

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

Наприклад, скористаємося формулою (5) для знаходження похідної функції $f(x) = \frac{1}{x}$. Маємо:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Таким чином, для будь-якого $x \neq 0$ виконується рівність $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ або

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Формулу (5) також можна узагальнити для будь-якого $r \in \mathbb{Q}$ і $x > 0$:

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad r \in \mathbb{Q} \quad (6)$$

Наприклад, знайдемо похідну функції $f(x) = \sqrt{x}$, скориставшись формулою (6). Маємо: $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Отже, для

$x > 0$ можна записати: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ або

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Узагалі, похідну функції $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, можна знаходити за формулою

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad (7)$$

Якщо n — непарне натуральне число, то формула (7) дає змогу знаходити похідну функції f у всіх точках x таких, що $x \neq 0$.

Якщо n — парне натуральне число, то формула (7) дає змогу знаходити похідну функції f для всіх додатних значень x .

Звернемося до тригонометричних функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Ці функції є диференційовними, і їхні похідні знаходять за такими формулами:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}$$

Доведення цих формул виходить за рамки розглядуваного курсу.

Під час обчислення похідних зручно користуватися таблицею похідних, розміщеною на форзаці 4.



1. Що називають похідною функції в точці?
2. Запишіть рівності, які виражають механічний і геометричний зміст похідної.
3. Яку функцію називають диференційовною в точці? диференційовною на множині?

ВПРАВИ

36.1.° Знайдіть похідну функції:

$$1) y = 5x - 6; \quad 2) y = \frac{1-x}{3}; \quad 3) y = 9.$$

36.2.° Знайдіть похідну функції:

$$1) y = x^4; \quad 3) y = x^{-15}; \quad 5) y = x^{-2,8};$$

$$2) y = x^{20}; \quad 4) y = \frac{1}{x^{17}}; \quad 6) y = x^{\frac{1}{5}}.$$

36.3.° Знайдіть похідну функції:

$$1) y = x^{10}; \quad 3) y = \frac{1}{x^8}; \quad 5) y = x^{\frac{7}{6}};$$

$$2) y = x^{-6}; \quad 4) y = 8 - 3x; \quad 6) y = x^{-0,2}.$$

36.4.° Продиференціюйте функцію:

$$1) y = \sqrt[4]{x}; \quad 2) y = \sqrt[8]{x^7}; \quad 3) y = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad 4) y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}.$$

36.5.° Продиференціюйте функцію:

$$1) y = \sqrt[9]{x}; \quad 2) y = \sqrt[6]{x^5}; \quad 3) y = \frac{1}{\sqrt[12]{x^7}}.$$

36.6.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0 :

$$1) f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad 2) f(x) = \cos x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{6}.$$

36.7.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0 :

$$1) f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}; \quad 2) f(x) = \cos x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{4}.$$

36.8.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0 :

$$1) f(x) = x\sqrt{x}, \quad x_0 = 81; \quad 3) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}}, \quad x_0 = 64.$$

$$2) f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}, \quad x_0 = 16;$$

36.9.* Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0 :

1) $f(x) = x^4\sqrt{x}$, $x_0 = 256$;

2) $f(x) = \sqrt[8]{x}\sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

36.10.* Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$;

2) $f(x) = 4 - x^2$.

36.11.* Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$;

2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

36.12.* Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 36.7) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

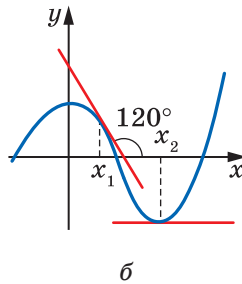
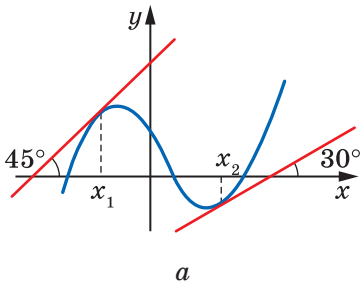


Рис. 36.7

36.13.* Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 36.8) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

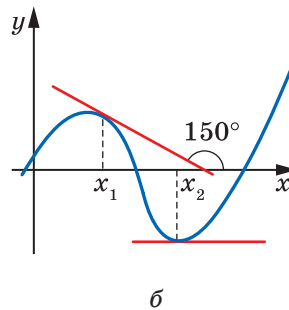
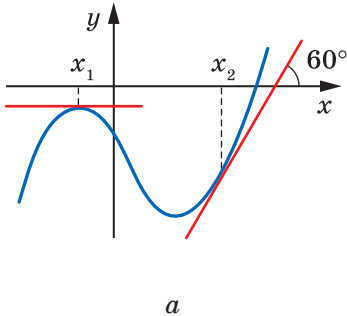


Рис. 36.8

36.14.* На рисунку 36.9 зображено графік функції f . Укажіть кілька значень аргументу x , для яких:

- 1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) = 0$.

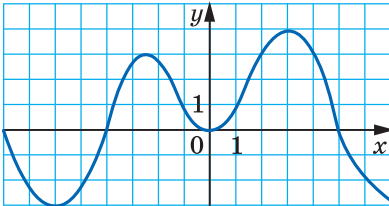


Рис. 36.9

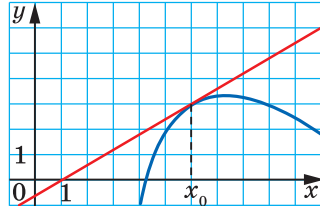


Рис. 36.10

36.15.* До графіка функції f у точці з абсцисою x_0 проведено дотичну (рис. 36.10). Знайдіть $f'(x_0)$.

36.16.* До графіка функції f у точці з абсцисою x_0 проведено дотичну (рис. 36.11). Знайдіть $f'(x_0)$.

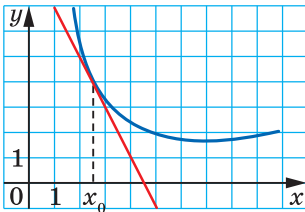


Рис. 36.11

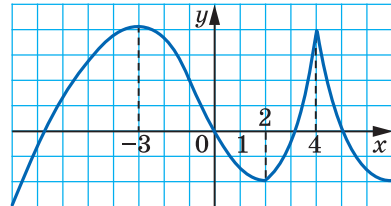


Рис. 36.12

36.17.* На рисунку 36.12 зображено графік функції f . Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

36.18.* На рисунку 36.13 зображено графік функції f . Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

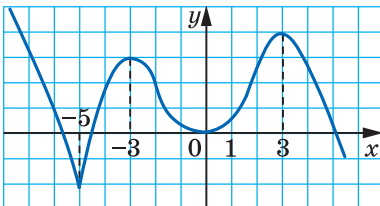


Рис. 36.13

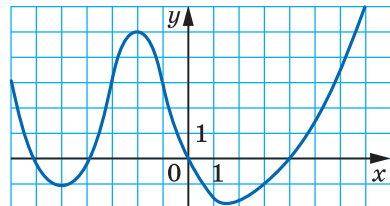


Рис. 36.14

36.19.* На рисунку 36.14 зображено графік функції f . Порівняйте числа:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $f'(-5)$ і $f'(1)$; | 3) $f'(-2)$ і $f'(4)$; |
| 2) $f'(-1)$ і $f'(6)$; | 4) $f'(0)$ і $f'(5)$. |

36.20.* Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2$. Знайдіть $s'\left(\frac{1}{2}\right)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

36.21.* Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3$. Знайдіть $s'(2)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

36.22.* Використовуючи геометричний зміст похідної, доведіть, що функція $y = \sqrt{1-x^2}$ не є диференційовною в точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$.

36.23.** Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = x|x|$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Проілюструйте отриманий результат графічно.

36.24.** Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2|x|$ у точці $x_0 = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

36.25. Чи є правильним твердження:

- якщо кожна пряма, паралельна осі абсцис, перетинає графік функції не більш ніж в одній точці, то дана функція є оборотною;
- якщо функція є непарною, то вона оборотна;
- якщо функція є парною, то вона оборотна;
- якщо оборотна функція є непарною, то обернена до неї функція теж непарна;
- функції $y = x^3$ і $y = \sqrt[3]{x}$ є взаємно оберненими;
- функції $y = x^4$ і $y = \sqrt[4]{x}$ є взаємно оберненими?

36.26. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

37. Правила обчислення похідних

Знайдемо, користуючись означенням, похідну функції $f(x) = x^2 + x$ у точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$1) \Delta f = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)}_{f(x_0 + \Delta x)} - \underbrace{(x_0^2 + x_0)}_{f(x_0)} = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + x_0 + \Delta x - x_0^2 - x_0 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x + 1;$$

3) якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то значення виразу $2x_0 + \Delta x + 1$ прямують до числа $2x_0 + 1$. Отже, при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x + 1) = 2x_0 + 1.$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2 + x$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 2x + 1, \text{ тобто} \\ (x^2 + x)' = 2x + 1.$$

З попереднього пункту вам відомо, що $(x^2)' = 2x$ і $(x)' = 1$. Таким чином, отримуємо:

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'$$

Отже, похідну функції $f(x) = x^2 + x$ можна було знайти як суму похідних функцій $y = x^2$ і $y = x$.

Справедливою є така теорема¹.

Теорема 37.1 (похідна суми). У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Коротко говорять: *похідна суми дорівнює сумі похідних*.

¹ Умовами теорем 37.1–37.4 передбачено таке: якщо функції f і g є диференційовними в точці x_0 , то відповідно функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ та $y = f(g(x))$ визначені на деякому проміжку, що містить точку x_0 .

Використовують і такий спрощений запис:

$$(f + g)' = f' + g'$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x) + g(x)$ у точці x_0 . Маємо:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) = \\ &= (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = \Delta f + \Delta g. \end{aligned}$$

$$\text{Запишемо: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right).$$

Оскільки функції f і g є диференційовними у точці x_0 , то існують границі $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$. Звідси отримуємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Отже, функція $y = f(x) + g(x)$ є диференційовною в точці x_0 , причому її похідна в цій точці дорівнює $f'(x_0) + g'(x_0)$. ◀

Теорему 37.1 можна узагальнити для будь-якої скінченної кількості доданків:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'.$$

Дві теореми, наведені нижче, також спрощують знаходження похідної.

Теорема 37.2 (похідна добутку). У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x)g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

Використовують і такий спрощений запис:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x)g(x)$ у точці x_0 . Ураховуючи рівності $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, маємо:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) = \\ &= (f(x_0) + \Delta f)(g(x_0) + \Delta g) - f(x_0)g(x_0) = \\ &= f(x_0)g(x_0) + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_0)g(x_0) = \\ &= \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g. \end{aligned}$$

Запишемо:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x \right).\end{aligned}$$

Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0 , то існують границі $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Тепер можна записати:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = \\ &= f'(x_0) g(x_0) + g'(x_0) f(x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot 0 = \\ &= f'(x_0) g(x_0) + g'(x_0) f(x_0).\end{aligned}$$

Таким чином, функція $y = f(x) g(x)$ є диференційовною в точці x_0 , причому її похідна в цій точці дорівнює

$$f'(x_0) g(x_0) + g'(x_0) f(x_0). \quad \blacktriangleleft$$

Наслідок 1. У тих точках, у яких є диференційовною функція $y = f(x)$, також є диференційовною функція $y = kf(x)$, де k — деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність $(kf(x))' = kf'(x)$.

Коротко говорять: *постійний множник можна виносити за знак похідної.*

Використовують і такий спрощений запис:

$$(kf)' = kf'$$

Доведення. Оскільки функція $y = k$ диференційовна в будь-якій точці, то, застосовуючи теорему про похідну добутку, можна записати:

$$(kf(x))' = (k)' f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \quad \blacktriangleleft$$

Наслідок 2. У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) - g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned}(f(x) - g(x))' &= (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1)g(x))' = \\ &= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Теорема 37.3 (похідна частки). У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційовними та значення функції g не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційовною, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Використовують і такий спрощений запис:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції:

$$1) \ y = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2; \quad 2) \ y = x^3 \cos x; \quad 3) \ y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}.$$

Розв'язання. 1) Користуючись теоремою про похідну суми та наслідками з теореми про похідну добутку, отримуємо:

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' = \\ &= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.\end{aligned}$$

$$2) \text{ Маємо: } y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 = \\ = 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

3) За теоремою про похідну добутку отримуємо:

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}\right)' = \frac{(2x^2 + 1)'(3x - 2) - (3x - 2)'(2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} = \\ &= \frac{4x(3x - 2) - 3(2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x - 2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x - 2)^2}. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Використовуючи теорему про похідну частки, легко довести, що

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Справді, } (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Формулу $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ доведіть самостійно.

Розглянемо функції $f(t) = 2t - 1$ і $g(x) = x^2 + x + 1$. Значення однієї функції можуть слугувати значеннями аргументу другої функції. Наприклад, $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Отже, можна говорити, що формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задає функцію $y = f(g(x))$.

Якщо для будь-якого $x \in M$ усі значення функції $t = g(x)$ є значеннями аргументу функції $y = f(t)$, то говорять, що задано **складену функцію** $y = f(g(x))$ з областю визначення M .

Розглянемо ще кілька прикладів.

Якщо $f(u) = \sin u$, а $g(x) = 1 - 3x$, то складена функція $y = f(g(x))$ задається формулою $y = \sin(1 - 3x)$. Функцію $y = \cos^2 x$ можна розглядати як складену функцію $y = f(g(x))$, де $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$.

Знаходити похідну складеної функції можна за допомогою такої теореми.

Теорема 37.4 (похідна складеної функції). Якщо функція $t = g(x)$ диференційовна в точці x_0 , а функція $y = f(t)$ диференційовна в точці t_0 , де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $h(x) = f(g(x))$ є диференційовною в точці x_0 , причому

$$h'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0)$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення похідної функції в точці x_0 :

1) $y = (3x - 7)^6$, $x_0 = 2$; 2) $y = \sqrt{4x^2 + 1}$, $x_0 = 0$; 3) $y = \sin \frac{x}{2}$, $x_0 = \pi$;

4) $y = \operatorname{tg}^3 5x$, $x_0 = \frac{\pi}{15}$.

Розв'язання. 1) Дана функція $y = (3x - 7)^6$ є складеною функцією $y = f(g(x))$, де $f(t) = t^6$, $g(x) = 3x - 7$. Оскільки $f'(t) = 6t^5$, а $g'(x) = 3$, то за теоремою про похідну складеної функції можна записати:

$$y'(x) = f'(t) g'(x) = 6t^5 \cdot 3 \text{ при } t = 3x - 7,$$

тобто

$$y'(x) = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5; \quad y'(2) = 18 \cdot (3 \cdot 2 - 7)^5 = -18.$$

Розв'язання цієї задачі можна оформити й так:

$$y' = ((3x - 7)^6)' = 6(3x - 7)^5 \cdot (3x - 7)' = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5;$$

$$y'(2) = -18.$$

$$2) \quad y' = (\sqrt{4x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 1}} \cdot (4x^2 + 1)' = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}};$$

$$y'(0) = 0.$$

$$3) \quad y' = \left(\sin \frac{x}{2}\right)' = \cos \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}; \quad y'(\pi) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$4) \quad y' = (\operatorname{tg}^3 5x)' = 3 \operatorname{tg}^2 5x \cdot (\operatorname{tg} 5x)' = 3 \operatorname{tg}^2 5x \cdot \frac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \frac{15 \operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x};$$

$$y' \left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{15 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} = 15 \cdot (\sqrt{3})^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 : \frac{1}{4} = 180.$$

Відповідь: 1) -18; 2) 0; 3) 0; 4) 180. ◀



Сформулюйте теореми, які виражають правила обчислення похідних.

ВПРАВИ

37.1.° Знайдіть похідну функції:

$$1) \quad y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10;$$

$$4) \quad y = 4 \sin x - 5 \cos x;$$

$$2) \quad y = 4x^6 + 20\sqrt{x};$$

$$5) \quad y = \operatorname{tg} x - 9x;$$

$$3) \quad y = 7x^6 + \frac{4}{x} - 1;$$

$$6) \quad y = 2x^{-2} + 3x^{-3}.$$

37.2.° Знайдіть похідну функції:

$$1) \quad y = 2x^5 - x;$$

$$3) \quad y = \sin x + 2 \cos x;$$

$$5) \quad y = 12 - \operatorname{ctg} x;$$

$$2) \quad y = x^7 - 4\sqrt{x};$$

$$4) \quad y = x - \frac{5}{x};$$

$$6) \quad y = 0,4x^{-5} + \sqrt{3}.$$

37.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 5)$;

4) $y = x \operatorname{ctg} x$;

2) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;

5) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$;

3) $y = x^2 \sin x$;

6) $y = \sqrt{x} \cos x$.

37.4.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;

3) $y = x^4 \cos x$;

2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$;

4) $y = x \operatorname{tg} x$.

37.5.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{5}{3x - 2}$;

2) $y = \frac{x^3}{\cos x}$;

3) $y = \frac{3 - x^2}{4 + 2x}$;

4) $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 7}$.

37.6.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{3x + 5}{x - 8}$;

2) $y = \frac{2x^2}{1 - 6x}$;

3) $y = \frac{\sin x}{x}$;

4) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

37.7.° Чому дорівнює значення похідної функції f у точці x_0 , якщо:

1) $f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 2}$, $x_0 = -3$;

3) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;

4) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = 0$?

37.8.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0 :

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x$, $x_0 = \frac{1}{4}$;

3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3}$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - x}$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1}$, $x_0 = 1$.

37.9.° Задайте за допомогою формул складені функції $y = f(g(x))$ і $y = g(f(x))$, якщо:

1) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 - 1$;

3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{x - 1}$;

2) $f(x) = x^4$, $g(x) = 5x + 2$;

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

37.10.° Задайте за допомогою формул складені функції $y = f(g(x))$ і $y = g(f(x))$, якщо:

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{tg} x$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$.

37.11.° Чи можуть дві різні функції мати рівні похідні? Відповідь проілюструйте прикладами.

37.12.* Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = (2x + 3)^5$; 5) $y = 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{5}$; 9) $y = \frac{1}{4x + 5}$;
 2) $y = \left(\frac{1}{3}x - 6\right)^{18}$; 6) $y = \sqrt{2x + 1}$; 10) $y = \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1\right)^{-6}$;
 3) $y = \cos 2x$; 7) $y = \sqrt[3]{1 - x}$; 11) $y = \sqrt{\sin x}$;
 4) $y = \sin^2 x$; 8) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; 12) $y = \sin \sqrt{x}$.

37.13.* Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = (3x - 5)^6$; 4) $y = 2 \operatorname{tg} 4x$; 7) $y = \sqrt[4]{6x + 8}$;
 2) $y = \sin \frac{x}{3}$; 5) $y = \cos \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; 8) $y = (9x - 2)^{-3}$;
 3) $y = \cos^2 x$; 6) $y = \sqrt{1 - x^2}$; 9) $y = \sqrt{\cos x}$.

37.14.* Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = x \sqrt{2x + 1}$; 4) $y = \frac{\cos 3x}{x - 1}$;
 2) $y = \sin x \cos 2x$; 5) $y = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}}$;
 3) $y = \operatorname{tg} x \sin (2x + 5)$; 6) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

37.15.* Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = x \sqrt{x + 3}$; 2) $y = \sin 2x \cos x$; 3) $y = (x + 2)^5 (x - 3)^4$.

37.16.* Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = \cos^3 2x$; 2) $y = \sqrt{\sin \left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}$; 3) $y = \left(\sin \frac{x}{3} - 5\right)^6$.

37.17.* Обчисліть:

- 1) $f'(0)$, якщо $f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{2x - 1}}$;
 2) $f'(0)$, якщо $f(x) = (\cos 3x + 6)^3$.

37.18.* Для знаходження похідної функції $y = \sin 2x$ учень застосує такий алгоритм:

- 1) робить заміну $2x = t$ і отримує функцію $y = \sin t$;
- 2) далі пише: $y' = (\sin t)' = \cos t$;
- 3) потім підставляє значення $2x = t$ і робить висновок, що $(\sin 2x)' = \cos 2x$.

У чому полягає помилка цього учня?

37.19.* Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть швидкість руху тіла в момент часу $t_0 = 5$ с.

37.20.* Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = (t + 2)^2 (t + 5)$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть її швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$ с.

37.21.* Матеріальна точка масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2 + 4$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс $p(t) = mv(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 2$ с.

37.22.* Тіло масою 2 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть кінетичну енергію $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ тіла в момент часу $t_0 = 4$ с.

37.23.* Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 - 8t + 15$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Визначте координату тіла в момент часу, коли його кінетична енергія дорівнює нулю.

37.24.** Знайдіть у точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$ похідну функції:

1) $f(x) = x^2 - 4 |x| + 3$;

2) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

37.25.** Знайдіть у точках $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$ похідну функції:

1) $f(x) = x^2 - 6 |x| + 5$;

2) $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

37.26. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1; -4)$ і паралельна прямій $y = 3x$.

37.27. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $X(-2; 1)$ та утворює з додатним напрямом осі абсцис кут:

1) $\alpha = 45^\circ$;

2) $\alpha = 60^\circ$;

3) $\alpha = 30^\circ$.

38. Рівняння дотичної

Нехай функція f є диференційовною в точці x_0 . Тоді до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну (рис. 38.1).

Із курсу геометрії 9 класу ви знаєте, що рівняння невертикальної прямої має вигляд $y = kx + b$, де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої.

Зважаючи на геометричний зміст похідної, отримуємо: $k = f'(x_0)$.

Тоді рівняння дотичної можна записати так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \quad (1)$$

Ця пряма проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$. Отже, координати цієї точки задовольняють рівняння (1). Маємо:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Звідси $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Підставимо знайдене значення b у рівняння (1):

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Перетворивши праву частину отриманої рівності, можна зробити висновок: якщо функція f є диференційовною в точці x_0 , то **рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , має вигляд**

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ПРИКЛАД 1 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2$;
 $f'(x) = -4 - 6x$;

$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8$. Підставивши знайдені числові значення в рівняння дотичної, отримуємо: $y = 8(x + 2) - 2$, тобто $y = 8x + 14$.

Відповідь: $y = 8x + 14$. ◀

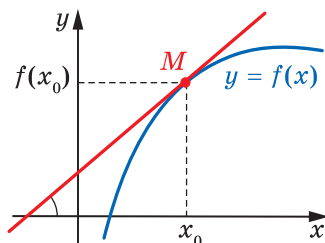


Рис. 38.1

ПРИКЛАД 2 Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції

$f(x) = \frac{x+4}{x-4}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -2x + 4$.

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x) = \frac{(x+4)'(x-4) - (x-4)'(x+4)}{(x-4)^2} = \frac{(x-4) - (x+4)}{(x-4)^2} = -\frac{8}{(x-4)^2}.$$

Якщо дотична паралельна прямій $y = -2x + 4$, то її кутовий коефіцієнт k дорівнює -2 .

Оскільки $f'(x_0) = k$, де x_0 — абсциса точки дотику шуканої прямої до графіка функції f , то $f'(x_0) = -2$, тобто $-\frac{8}{(x_0-4)^2} = -2$.

Звідси

$$(x_0 - 4)^2 = 4; \quad \begin{cases} x_0 - 4 = 2, \\ x_0 - 4 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 6, \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

Отже, на графіку функції $f(x) = \frac{x+4}{x-4}$ існують дві точки, у яких дотичні до нього паралельні даній прямій.

При $x_0 = 6$ маємо: $f(x_0) = 5$. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y = -2(x - 6) + 5$; $y = -2x + 17$.

При $x_0 = 2$ отримуємо: $f(x_0) = -3$. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y = -2(x - 2) - 3$; $y = -2x + 1$.

Відповідь: $y = -2x + 17$; $y = -2x + 1$. ◀

ПРИКЛАД 3 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, яка проходить через точку $M(-1; -1)$.

Розв'язання. Зауважимо, що $f(-1) \neq -1$. Із цього випливає, що точка $M(-1; -1)$ не належить графіку функції f .

Нехай $A(x_0; f(x_0))$ — точка дотику шуканої прямої до графіка функції f . Оскільки $f(x_0) = -x_0^2 - 5x_0 - 6$ і $f'(x_0) = -2x_0 - 5$, то рівняння дотичної має вигляд

$$y = (-2x_0 - 5)(x - x_0) + (-x_0^2 - 5x_0 - 6).$$

Ураховуючи, що координати точки $M(-1; -1)$ задовольняють отримане рівняння, маємо:

$$-1 = (-2x_0 - 5)(-1 - x_0) + (-x_0^2 - 5x_0 - 6).$$

Звідси, розкривши дужки та розв'язавши квадратне рівняння, отримаємо $x_0 = 0$ або $x_0 = -2$. Таким чином, через точку M проходять дві дотичні до графіка функції f : $y = -5x - 6$ і $y = -x - 2$.

Відповідь: $y = -5x - 6$; $y = -x - 2$. ◀



Запишіть загальний вигляд рівняння дотичної до графіка функції в даній точці.

ВПРАВИ

38.1.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , якщо:

$$1) f(x) = x^2 + 3x, x_0 = -1; \quad 4) f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$2) f(x) = 4\sqrt{x} - 3, x_0 = 9; \quad 5) f(x) = \frac{x}{x+1}, x_0 = -2;$$

$$3) f(x) = \sin x, x_0 = 0; \quad 6) f(x) = \sqrt{2x+5}, x_0 = 2.$$

38.2.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , якщо:

$$1) f(x) = 2x^3 - 3x, x_0 = 1; \quad 3) f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}, x_0 = -1;$$

$$2) f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}; \quad 4) f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}, x_0 = 3.$$

38.3.* Запишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці його перетину з віссю ординат:

$$1) f(x) = x^2 - 3x - 3; \quad 2) f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

38.4.* Запишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці його перетину з віссю ординат:

$$1) f(x) = 2x^3 - 5x + 2; \quad 2) f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

38.5.* Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці його перетину з віссю абсцис:

$$1) f(x) = 8x^3 - 1; \quad 2) f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

38.6.* Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці його перетину з віссю абсцис:

$$1) f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}; \quad 2) f(x) = 3x - x^2.$$

38.7.* Знайдіть координати точки параболи $y = 2x^2 - x + 1$, у якій дотична до неї паралельна прямій $y = 7x - 8$.

38.8.* У яких точках дотичні до графіка функції $y = \frac{1}{x}$ паралельні прямій $y = -x$?

38.9.* Знайдіть таку точку графіка функції f , що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α , якщо:

$$1) f(x) = x^2 - 7x + 3, \alpha = 45^\circ; \quad 3) f(x) = \sqrt{3x+2}, \alpha = 45^\circ;$$

$$2) f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x - 2, \alpha = 60^\circ; \quad 4) f(x) = \frac{x+7}{x-2}, \alpha = 135^\circ.$$

38.10.* Знайдіть таку точку графіка функції f , що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α , якщо:

$$1) f(x) = \sqrt{3}x - \frac{x^3}{3}, \alpha = 60^\circ; \quad 2) f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1, \alpha = 45^\circ.$$

38.11.* Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції f утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис:

$$1) f(x) = 6 - x - x^3; \quad 2) f(x) = \frac{5-x}{x-3}.$$

38.12.* Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції f утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис:

$$1) f(x) = x^5 + 2x - 8; \quad 2) f(x) = \frac{4}{1-x}.$$

38.13.* Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції:

$$1) f(x) = x^3 - 3x + 1; \quad 2) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1.$$

38.14.* Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$.

38.15.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

$$1) f(x) = x - \frac{1}{x^2}, \text{ якщо ця дотична паралельна прямій } y = 3x;$$

$$2) f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1, \text{ якщо ця дотична паралельна прямій } y = 2x + 1.$$

38.16.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

$$1) f(x) = 3x^2 + 5x + 3, \text{ якщо ця дотична паралельна прямій } y = -7x + 3;$$

$$2) f(x) = \sqrt{x}, \text{ якщо ця дотична паралельна прямій } y = x.$$

38.17.** Установіть, чи є пряма $y = 12x - 10$ дотичною до графіка функції $f(x) = 4x^3$. У разі ствердної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

- 38.18.**** Установіть, чи є пряма $y = x$ дотичною до графіка функції $y = \sin x$. У разі ствердної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.
- 38.19.**** Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.
- 38.20.**** Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- 38.21.**** На графіку функції $f(x) = -\sqrt{2x+1}$ знайдіть точку, у якій дотична до нього перпендикулярна до прямої $y - 2x + 1 = 0$.
- 38.22.**** Чи існують дотичні до графіка функції $f(x) = x^3 + 2x - 1$, які перпендикулярні до прямої $y = -x$?
- 38.23.**** При яких значеннях b і c парабола $y = x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = 4x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$?
- 38.24.**** При яких значеннях a і b пряма $y = 7x - 2$ дотикається до параболи $y = ax^2 + bx + 1$ у точці $A(1; 5)$?
- 38.25.**** Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^2 + 2$, якщо ця дотична проходить через точку $M(0; 1)$.
- 38.26.**** У якій точці графіка функції $f(x) = \frac{4x-1}{x}$ треба провести дотичну, щоб ця дотична проходила через початок координат?
- 38.27.*** Дві перпендикулярні дотичні до графіка функції $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$ перетинаються в точці A , яка належить осі ординат. Знайдіть координати точки A .
- 38.28.*** Дві перпендикулярні дотичні до графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$ перетинаються в точці A , яка належить осі ординат. Знайдіть координати точки A .
- 38.29.*** При яких значеннях a пряма $y = ax + 1$ є дотичною до графіка функції $f(x) = \sqrt{4x+1}$?
- 38.30.*** При яких значеннях a пряма $y = 2x + a$ є дотичною до графіка функції $f(x) = \sqrt{4x-1}$?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

38.31. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{(x+3)^2}{(x+2)(x-5)} < 0;$

3) $\frac{(2x+1)^2(x-2)}{x^5(x+1)^4} \geq 0.$

2) $\frac{(x+2)(x-5)}{(x-3)^2} \leq 0;$

38.32. Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{якщо } x \leq -4, \\ -x-2, & \text{якщо } -4 < x < 2, \\ -\frac{8}{x}, & \text{якщо } x \geq 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 5, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x^2 - 2x - 3, & \text{якщо } -2 < x < 4, \\ 2x - 3, & \text{якщо } x \geq 4. \end{cases}$

Укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.

39. Ознаки зростання і спадання функції

Розглянемо функцію f і таку точку x_0 інтервалу $(a; b)$, що $\max_{[a; b]} f(x) = f(x_0)$ (рис. 39.1, а). На рисунку 39.1, б зображено графік функції g такої, що $\min_{[a; b]} g(x) = g(x_0)$.

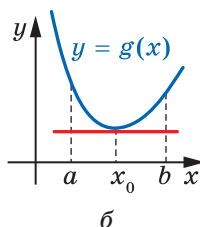
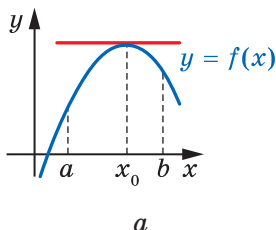


Рис. 39.1

Нехай функції f і g є диференційовними в точці x_0 . Тоді до графіків цих функцій у точці з абсцисою x_0 можна провести дотичні. З наочних міркувань очевидно, що ці дотичні будуть горизонтальними прямими. Оскільки кутовий коефіцієнт горизонтальної прямої дорівнює нулю, то $f'(x_0) = 0$ і $g'(x_0) = 0$.

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою механічної інтерпретації.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, і функція $y = s(t)$ набуває в точці $t_0 \in (a; b)$ найбільшого (найменшого) значення, то це означає, що в момент часу t_0 матеріальна точка змінює напрям руху на протилежний. Зрозуміло, що в цей момент часу швидкість матеріальної точки дорівнює нулю, тобто $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 39.1 (теорема Ферма). *Нехай функція f , визначена на проміжку $[a; b]$, у точці $x_0 \in (a; b)$ набуває свого найменшого (найбільшого) значення. Якщо функція f є диференційовною в точці x_0 , то $f'(x_0) = 0$.*

На рисунку 39.2 зображено графік функції f , диференційовної на проміжку $[a; b]$, яка в точках a і b набуває однакових значень.

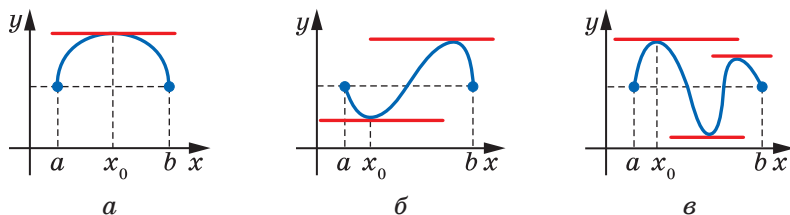


Рис. 39.2

З рисунка видно: існує щонайменше одна така точка $x_0 \in (a; b)$, що дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) = 0$.

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою механічної інтерпретації.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то рівність $s(a) = s(b)$ означає, що в момент часу $t = b$ матеріальна точка повернулася в початкове положення. Отже, у деякий момент часу $t_0 \in (a; b)$ вона змінила напрям руху на протилежний, тобто $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 39.2 (теорема Ролля). *Якщо функція f є диференційовною на відрізку $[a; b]$, причому $f(a) = f(b)$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що $f'(x_0) = 0$.*

На рисунку 39.3 зображено графік функції, диференційовної на відрізку $[a; b]$.

Проведемо пряму AB . Із трикутника AMB можна знайти кутовий коефіцієнт цієї прямої:

$$\operatorname{tg} \angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

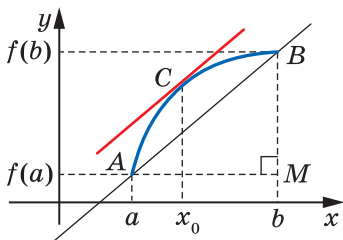


Рис. 39.3

З рисунка видно: на дузі AB існує така точка C , що дотична до графіка в цій точці паралельна прямій AB .

Кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ цієї дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту прямої AB , тобто існує точка $x_0 \in (a; b)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Цей висновок ілюструє також механічна інтерпретація.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то її середня швидкість дорівнює:

$$v_{\text{сеп}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Зрозуміло, що під час руху є такий момент $t_0 \in (a; b)$, коли миттєва швидкість дорівнює середній, тобто

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$



Мішель Роль
(1652–1719)

Французький математик, член Паризької академії наук. Основні праці присвячені методам чисельного розв'язування рівнянь. Більшість наукових здобутків М. Ролля не були помічені науковою спільнотою за його життя; їх оцінили значно пізніше.

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 39.3 (теорема Лагранжа). *Якщо функція f є диференційовною на відрізку $[a; b]$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Звернемо увагу, що теореми Ролля і Лагранжа не вказують, як знайти точку x_0 . Вони лише гарантують, що існує точка з певною властивістю.

Ви знаєте, що коли функція є константою, то її похідна дорівнює нулю. Виникає запитання: якщо функція f є такою, що для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то чи є функція f константою на проміжку I ?

Звернемося до механічної інтерпретації.

Нехай $y = s(t)$ – закон руху матеріальної точки по координатній прямій. Якщо в будь-який момент часу t від t_1 до t_2 виконується рівність $s'(t) = 0$, то протягом розглядуваного проміжку часу миттєва швидкість дорівнює нулю, тобто точка не рухається і її координата не змінюється. Це означає, що на розглядуваному проміжку функція $y = s(t)$ є константою.

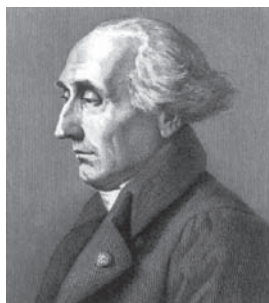
Ці міркування підказують, що справедливою є така теорема.

Теорема 39.4 (ознака сталості функції). *Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.*

Доведення. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу функції f , узяті з проміжку I , причому $x_1 < x_2$.

Жозеф Луї Лагранж (1736–1813)

Французький математик, механік і астроном, президент Берлінської академії наук, член Паризької академії наук. Основні праці — у галузі математичного аналізу, варіаційного числення, алгебри, теорії чисел, диференціальних рівнянь, механіки. Кавалер ордена Почесного легіону.



Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на проміжку I , то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) = 0$. Отже, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$. Звідси $f(x_2) = f(x_1)$. Ураховуючи, що числа x_1 і x_2 вибрано довільним чином, можемо зробити висновок: функція f є константою на проміжку I . ◀

На рисунку 39.4 зображено графік деякої функції f , яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$. Цей графік має таку властивість: будь-яка дотична до графіка утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис.

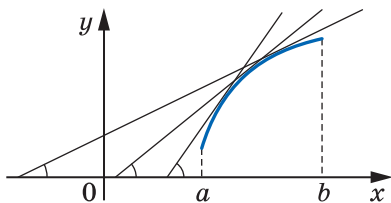


Рис. 39.4

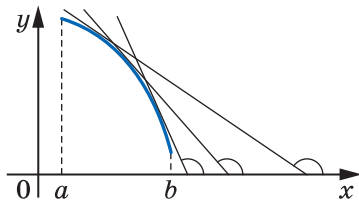


Рис. 39.5

Оскільки тангенс гострого кута є додатним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є додатним. Тоді, виходячи з геометричного змісту похідної, можна зробити такий висновок: для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) > 0$.

З рисунка 39.4 видно, що функція f зростає на розглядуваному проміжку.

На рисунку 39.5 зображено графік деякої функції f , яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$. Будь-яка дотична до графіка утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис.

Оскільки тангенс тупого кута є від'ємним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є від'ємним. Тоді для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) < 0$.

З рисунка 39.5 видно, що функція f спадає на розглядуваному проміжку.

Ці приклади показують, що знак похідної функції на деякому проміжку I пов'язаний з тим, чи є ця функція зростаючою (спадною) на проміжку I .

Зв'язок між знаком похідної та зростанням (спаданням) функції можна виявити також за допомогою механічної інтерпретації. Якщо швидкість, тобто похідна функції $y = s(t)$, є додатною, то точка на координатній прямій рухається вправо (рис. 39.6). Це означає, що з нерівності $t_1 < t_2$ випливає нерівність $s(t_1) < s(t_2)$, тобто функція $y = s(t)$ є зростаючою. Аналогічно, якщо швидкість є від'ємною, то точка рухається вліво, тобто функція $y = s(t)$ є спадною.

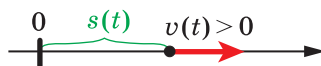


Рис. 39.6

Зв'язок між знаком похідної та зростанням (спаданням) функції установлюють такі теореми.

Теорема 39.5 (ознака зростання функції). Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.

Теорема 39.6 (ознака спадання функції). Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Доведемо теорему 39.5 (теорему 39.6 можна довести аналогічно).

Доведення. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу функції f , узяті з проміжку I , причому $x_2 > x_1$.

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на проміжку I , то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) > 0$. Отже, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція f зростає на проміжку I . ◀

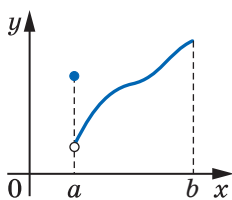


Рис. 39.7

Справедливе й таке твердження: якщо диференційовна на проміжку I функція f зростає (спадає), то для всіх x із цього проміжку виконується нерівність $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Якщо функція f визначена на проміжку $[a; b]$ і зростає на інтервалі $(a; b)$, то це не означає, що вона зростає на проміжку $[a; b]$ (рис. 39.7). Дослідити зростання і спадання функції на різних проміжках допомагає така ключова задача.

ПРИКЛАД 1 Нехай для довільного $x \in (a; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ і функція f має похідну в точці a . Доведіть, що функція f зростає на проміжку $[a; b)$.

Розв'язання. З теореми 39.2 випливає тільки те, що функція f зростає на інтервалі $(a; b)$. Для доведення того, що функція f зростає на проміжку $[a; b)$, потрібно додаткове дослідження.

Нехай x — довільна точка проміжку $(a; b)$. Доведемо, що $f(x) > f(a)$. З теореми Лагранжа для функції f на відрізку $[a; x]$ випливає існування такої точки $x_0 \in (a; x)$, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Оскільки $x_0 \in (a; b)$, то $f'(x_0) > 0$. Звідси $f(x) > f(a)$.

Таким чином, доведено, що функція f зростає на проміжку $[a; b)$. ◀

Зауваження 1. Насправді сформульовану в даному прикладі умову можна послабити, замінивши вимогу диференційовності функції f у точці $x = a$ на її неперервність у цій точці. Можна довести, що справедливе таке твердження: якщо для всіх $x \in (a; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ і функція f є неперервною в точці $x = a$, то функція f зростає на проміжку $[a; b)$.

Зауваження 2. Використовуючи відповідні твердження, можна обґрунтувати зростання (спадання) функції f на проміжках іншого виду, наприклад $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $[a; b]$. Так, якщо для всіх $x \in (a; +\infty)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ і функція f неперервна в точці $x = a$, то функція f зростає на проміжку $[a; +\infty)$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

$$1) f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}; \quad 3) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}.$$

Розв'язання. 1) Маємо:

$$f'(x) = -3x^3 + 12x^2 - 12x = -3x(x^2 - 4x + 4) = -3x(x - 2)^2.$$

Дослідивши знак похідної (рис. 39.8), доходимо висновку, що функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на кожному з проміжків $[0; 2]$ і $[2; +\infty)$, тобто спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

2) Маємо: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Знайшовши похідну функції f ,

$$\text{отримуємо: } f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

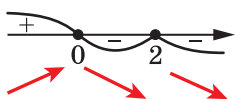


Рис. 39.8

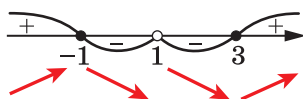


Рис. 39.9

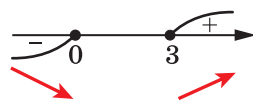


Рис. 39.10

Дослідимо знак функції $y = f'(x)$ (рис. 39.9). Отже, дана функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ і $[3; +\infty)$ та спадає на кожному з проміжків $[-1; 1]$ і $(1; 3]$.

3) Маємо: $D(f) = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. Знайдемо похідну функції f :

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 3x}\right)' = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}. \text{ Зауважимо, що в точках } x = 0 \text{ і } x = 3$$

функція f не є диференційовною, але є неперервною.

$$\text{Нерівність } \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} > 0 \text{ рівносильна системі } \begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases} \text{ Розв'я-$$

завши її, отримуємо, що множиною розв'язків розглядуваної нерівності є проміжок $(3; +\infty)$.

Далі легко встановити, що множиною розв'язків нерівності

$$\frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} < 0 \text{ є проміжок } (-\infty; 0).$$

Отже, якщо $x < 0$, то $f'(x) < 0$; якщо $x > 3$, то $f'(x) > 0$ (рис. 39.10).

Звідси випливає, що функція f зростає на проміжку $[3; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$. ◀

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $x^3 + x - \sqrt{1 - 3x} + 4 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + x - \sqrt{1 - 3x} + 4$,

$$D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]. \text{ Для всіх } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \text{ маємо: } f'(x) = 3x^2 + 1 + \frac{3}{2\sqrt{1 - 3x}}.$$

Очевидно, що $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, тобто функція f зростає

на проміжку $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. Оскільки функція f є неперервною в точці

$x = \frac{1}{3}$, то вона зростає на $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. Тоді функція f набуває

кожного свого значення тільки один раз, а отже, дане рівняння не може мати більше одного кореня.

Оскільки $f(-1) = 0$, то $x = -1$ є єдиним коренем даного рівняння.

Відповідь: -1 . ◀



1. Сформулюйте теореми Ферма, Ролля та Лагранжа.
2. Сформулюйте ознаки сталості, зростання, спадання функції.

ВПРАВИ

39.1.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
- 2) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
- 3) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
- 4) $f(x) = x^3 + 4x - 8$.

39.2.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
- 2) $f(x) = x^4 + 4x - 20$.

39.3.* Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
- 2) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
- 3) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
- 4) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}$.

39.4.* Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
- 2) $f(x) = 3x + \frac{12}{x^2}$;
- 3) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$;
- 4) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

39.5.* На рисунку 39.11 зображено графік похідної функції f , диференційовної на \mathbb{R} . Укажіть проміжки спадання функції f .

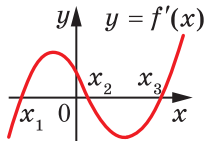


Рис. 39.11

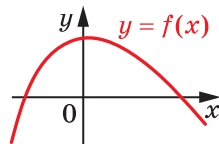


Рис. 39.12

39.6.* На рисунку 39.12 зображено графік функції $y = f(x)$, диференційовної на \mathbb{R} . Серед наведених на рисунку 39.13 графіків укажіть той, який може бути графіком функції $y = f'(x)$.

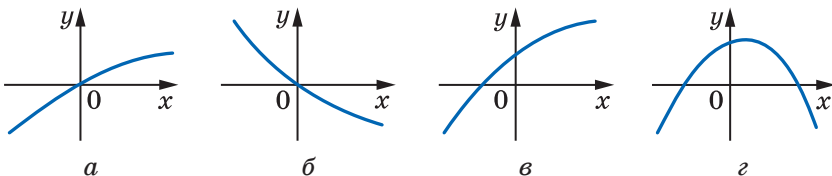


Рис. 39.13

39.7.* На рисунку 39.14 зображено графік похідної функції f , диференційовної на \mathbb{R} . Укажіть проміжки зростання функції f .

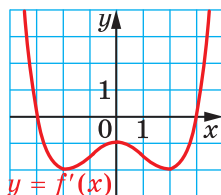


Рис. 39.14

39.8.* На рисунку 39.15 зображено графіки похідних функцій f , g і h , диференційованих на \mathbb{R} . Яка з функцій f , g і h спадає на відрізку $[-1; 1]$?

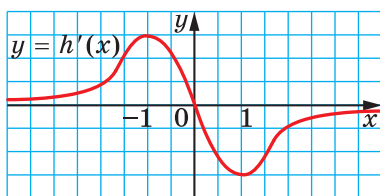
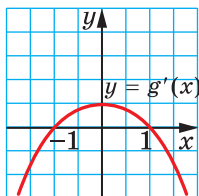
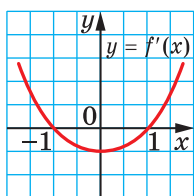


Рис. 39.15

39.9.* На рисунку 39.16 зображено графіки похідних функцій f , g і h . Яка з функцій f , g і h спадає на \mathbb{R} ?

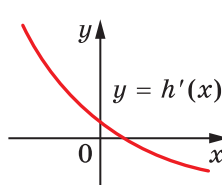
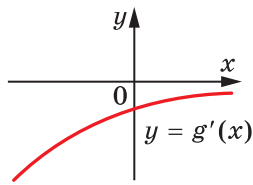
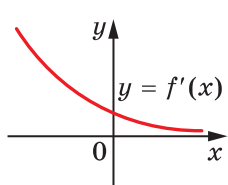


Рис. 39.16

39.10.* Доведіть, що функція є спадною:

1) $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$; 2) $f(x) = \sin 2x - 3x$.

39.11.* Доведіть, що функція є зростаючою:

1) $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$; 2) $f(x) = \sin x + x^3 + x$.

39.12.* Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x\sqrt{2} + \sin x$; 3) $y = \cos x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

2) $f(x) = x - \cos x$;

39.13.* Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \sin x - x$; 2) $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \sin x$.

39.14.* Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$;

2) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$.

39.15.* Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

39.16.** На рисунку 39.17 зображено графіки функцій f і g , визначених на \mathbb{R} . Використовуючи ці графіки, розв'яжіть нерівність:

1) $f'(x) \leq 0$;

2) $g'(x) \geq 0$.

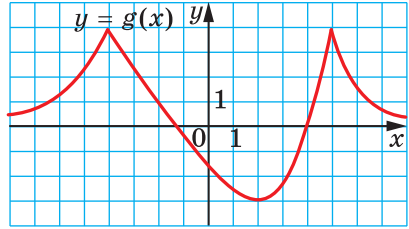
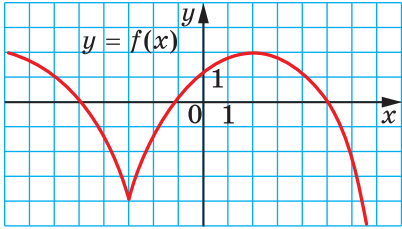


Рис. 39.17

39.17.** На рисунку 39.18 зображено графіки функцій f і g , визначених на \mathbb{R} . Використовуючи ці графіки, розв'яжіть нерівність:

1) $f'(x) \geq 0$;

2) $g'(x) \leq 0$.

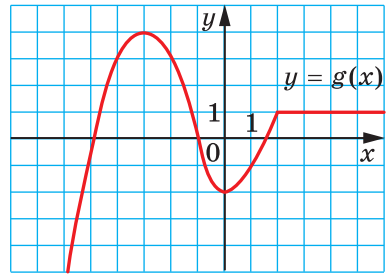
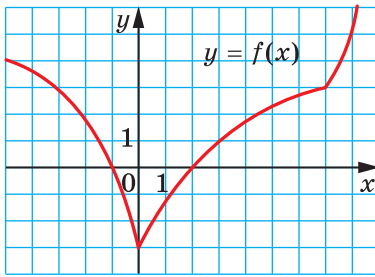


Рис. 39.18

39.18.** При яких значеннях параметра a є зростаючою функція:

1) $y = x^3 - ax$;

3) $y = -2\sqrt{1-x} + ax$;

2) $y = 3 \sin 4x + ax$;

4) $y = \frac{x^3}{3} + 2(a+1)x^2 + 9x - 4$?

39.19.** При яких значеннях параметра a є спадною функція:

1) $y = ax - x^5$;

3) $y = -2\sqrt{x+3} + ax$;

2) $y = 2 \cos 3x + ax$;

4) $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 4x + 21$?

39.20.** При яких значеннях параметра c функція
 $f(x) = (c - 12)x^3 + 3(c - 12)x^2 + 6x + 7$
 зростає на \mathbb{R} ?

39.21.** При яких значеннях параметра a функція
 $y = (a + 3)x^3 + 3(a + 3)x^2 - 5x + 12$
 спадає на \mathbb{R} ?

39.22.* Розв'яжіть рівняння $x^5 + 4x + \cos x = 1$.

39.23.* Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x = \sin x$.

39.24.* Розв'яжіть нерівність $x^7 + 3x > 2x^4 + 2$.

39.25.* Розв'яжіть нерівність $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$.

39.26.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$

39.27.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 2y = \cos y - \cos x, \\ x + y = 8. \end{cases}$

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

39.28. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 1$;

6) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4} - 5$;

2) $f(x) = \sqrt{x} - 2$;

7) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;

3) $g(x) = 3 - x^2$;

8) $f(x) = \sqrt{x - 3} - \sqrt{3 - x}$;

4) $f(x) = x^2 + 2$;

9) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

5) $\varphi(x) = 5 + |x|$;

10) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

40. Точки екстремуму функції

Ознайомлюючись з такими поняттями, як границя та неперервність функції в точці, ми досліджували поведінку функції поблизу цієї точки або, як прийнято говорити, у її околі.

Означення. Проміжок $(a; b)$, який містить точку x_0 , називають **околом** точки x_0 .

Зрозуміло, що будь-яка точка має безліч околів. Наприклад, проміжок $(-1; 3)$ — один з околів точки $2,5$. Разом з тим цей проміжок не є околом точки 3 .

На рисунку 40.1 зображено графіки чотирьох функцій. Усі ці функції мають спільну особливість: існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

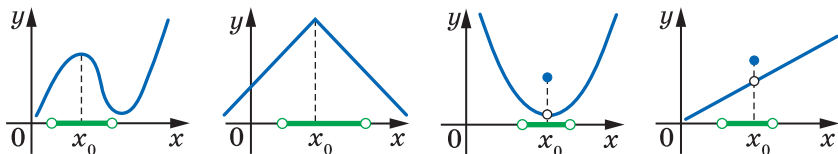


Рис. 40.1

Означення. Точку x_0 називають **точкою максимуму** функції f , якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

Наприклад, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є точкою максимуму функції $y = \sin x$ (рис. 40.2). Записують: $x_{\max} = \frac{\pi}{2}$.

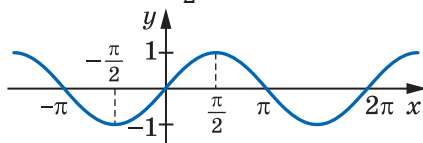


Рис. 40.2

На рисунку 40.1 $x_{\max} = x_0$.

Означення. Точку x_0 називають **точкою мінімуму** функції f , якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.

Наприклад, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ є точкою мінімуму функції $y = \sin x$ (рис. 40.2). Записують: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунку 40.3 зображено графіки функцій, для яких x_0 є точкою мінімуму, тобто $x_{\min} = x_0$.

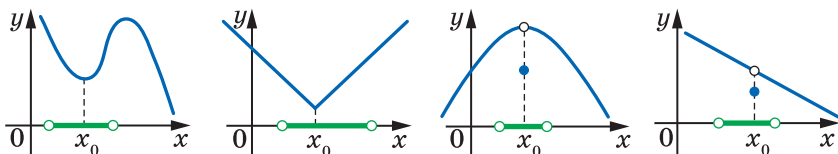


Рис. 40.3

Точки максимуму і мінімуму мають спільну назву: їх називають **точками екстремуму функції** (від латин. *extremum* — край, кінець).

На рисунку 40.4 точки $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ є точками екстремуму функції f .

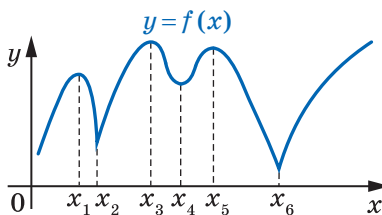


Рис. 40.4

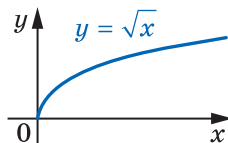


Рис. 40.5

З означень точок максимуму і мінімуму випливає, що точки екстремуму є внутрішніми точками¹ області визначення функції. Це означає, що, наприклад, точка $x_0 = 0$ не є точкою мінімуму функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 40.5), а точка $x_0 = 1$ не є точкою максимуму функції $y = \arcsin x$ (рис. 40.6). Разом з тим найменше значення функції $y = \sqrt{x}$ на множині $[0; +\infty)$ дорівнює нулю, тобто

$$\min_{[0; +\infty)} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0, \quad \max_{[-1; 1]} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

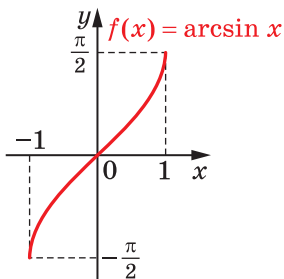


Рис. 40.6

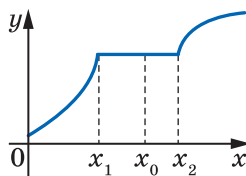


Рис. 40.7

На рисунку 40.7 зображено графік деякої функції f , яка на проміжку $[x_1; x_2]$ є константою. Точка x_1 є точкою максимуму, точка x_2 — мінімуму, а будь-яка точка інтервалу $(x_1; x_2)$ є одночасно як точкою максимуму, так і точкою мінімуму функції f .

¹ Точку $x_0 \in M$ називають *внутрішньою* точкою множини M , якщо існує окіл точки x_0 , який є підмножиною множини M .

Графіки функцій, зображені на рисунках 40.8 і 40.9, показують, що точки екстремуму можна поділити на два види: ті, у яких похідна дорівнює нулю (на рисунку 40.8 дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою), і ті, у яких функція є недиференційовною (рис. 40.9).

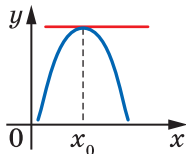


Рис. 40.8

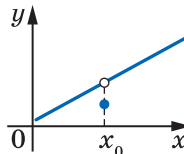
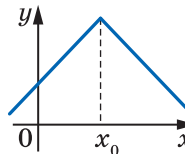
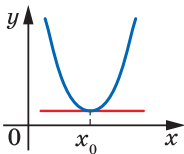


Рис. 40.9

Насправді справедливою є така теорема.

Теорема 40.1. Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f , то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційовною в точці x_0 .

Справедливість цієї теореми впливає з теореми Ферма.

Виникає природне запитання: чи обов'язково є точкою екстремуму внутрішня точка області визначення функції, у якій похідна дорівнює нулю або не існує?

Відповідь на це запитання заперечна.

Так, на рисунку 40.10 зображено графік функції, недиференційовної в точці x_0 . Проте точка x_0 не є точкою екстремуму.

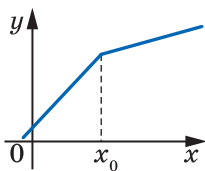


Рис. 40.10

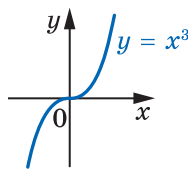


Рис. 40.11

Наведемо ще один приклад. Для функції $f(x) = x^3$ маємо: $f'(x) = 3x^2$. Тоді $f'(0) = 0$. Проте точка $x_0 = 0$ не є точкою екстремуму функції f (рис. 40.11).

Ці приклади показують, що рівність нулю похідної в точці x_0 або недиференційовність функції в цій точці є необхідною, але не достатньою умовою існування екстремуму в точці x_0 .

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають **критичними точками** функції.

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є критичною точкою функцій $y = x^3$ і $y = |x|$; точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є критичною точкою функції $y = \sin x$.

Зі сказаного вище випливає, що *кожна точка екстремуму функції є її критичною точкою, проте не кожна критична точка є точкою екстремуму*. Іншими словами, *точки екстремуму слід шукати серед критичних точок*. Цей факт проілюстровано на рисунку 40.12.

На рисунку 40.13 зображено графіки функцій, для яких x_0 є критичною точкою.

На рисунках 40.13, *a–г* критична точка x_0 є точкою екстремуму, на рисунках 40.13, *г, д* критична точка x_0 не є точкою екстремуму.



Рис. 40.12

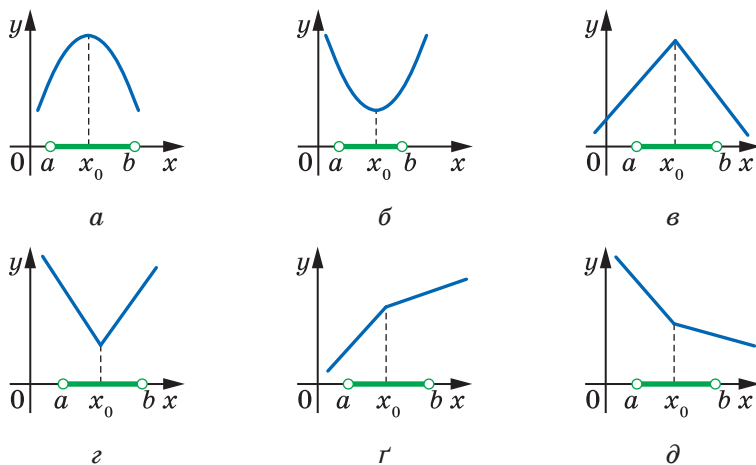


Рис. 40.13

Наявність екстремуму функції в точці x_0 зумовлена поведінкою функції в околі цієї точки. Так, для функцій, графіки яких зображено на рисунках 40.13, *a–г*, маємо: функція **зростає** (**спадає**) на проміжку $(a; x_0]$ і **спадає** (**зростає**) на проміжку $[x_0; b)$.

Функції, графіки яких зображено на рисунках 40.13, *г, д*, такої властивості не мають: перша з них зростає на кожному з проміжків $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$, друга спадає на цих проміжках.

Узагалі, якщо область визначення неперервної функції розбита на скінченну кількість проміжків зростання і спадання, то легко знайти всі точки екстремуму (рис. 40.14).

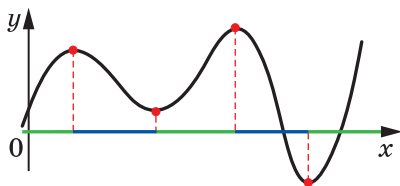


Рис. 40.14

Ви знаєте, що за допомогою похідної можна знаходити проміжки зростання (спадання) диференційовної функції. Дві теореми, наведені нижче, показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму функції.

Теорема 40.2 (ознака точки максимуму функції). Нехай функція f є диференційовною на інтервалі $(a; b)$ і x_0 — деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, а для всіх $x \in [x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f (рис. 40.13, а).

Теорема 40.3 (ознака точки мінімуму функції). Нехай функція f є диференційовною на інтервалі $(a; b)$ і x_0 — деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, а для всіх $x \in [x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f (рис. 40.13, б).

Доведемо теорему 40.2 (теорему 40.3 можна довести аналогічно).

Доведення. Нехай x_1 — довільна точка інтервалу $(a; x_0)$. З теореми Лагранжа для відрізка $[x_1; x_0]$ випливає існування такої точки $c \in (x_1; x_0)$, що

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

Оскільки $c \in (a; x_0]$, то $f'(c) \geq 0$. З нерівностей $f'(c) \geq 0$ і $x_0 - x_1 > 0$ отримуємо: $f(x_0) \geq f(x_1)$.

Аналогічно для довільної точки $x_2 \in (x_0; b)$ можна довести, що $f(x_0) \geq f(x_2)$.

Звідси випливає, що x_0 — точка максимуму. ◀

Іноколи зручно користуватися спрощеними формулюваннями цих двох теорем: якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак із плюса на мінус, то x_0 — точка максимуму; якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 — точка мінімуму.

Для функції f точки екстремуму можна шукати за такою схемою.

1) Знайти $f'(x)$.

2) Дослідити знак похідної в околах критичних точок.

3) Користуючись відповідними теоремами, стосовно кожної критичної точки з'ясувати, чи є вона точкою екстремуму.

ПРИКЛАД Знайдіть точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x; \quad 3) f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1};$$

$$2) f(x) = 2x^2 - x^4; \quad 4) f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x}}.$$

Розв'язання. 1) Маємо:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2).$$

Методом інтервалів дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 40.15). Отримуємо: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 2$.



Рис. 40.15

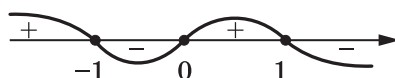


Рис. 40.16

$$2) f'(x) = 4x - 4x^3 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x + 1)(x - 1).$$

Дослідивши знак похідної (рис. 40.16), отримуємо: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 0$ і $x_{\max} = 1$.

$$\begin{aligned} 3) \text{ Маємо: } f'(x) &= \frac{(x^2 - x + 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (рис. 40.17). Отримуємо: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 3$.

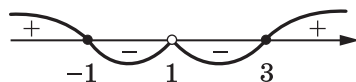


Рис. 40.17

4) Маємо:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x + 2)' \cdot \sqrt{x} - (\sqrt{x})' \cdot (x + 2)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x + 2)}{x} = \\ &= \frac{2x - (x + 2)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x - 2}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Якщо $0 < x \leq 2$, то $f'(x) \leq 0$; якщо $x \geq 2$, то $f'(x) \geq 0$. Отже, критична точка $x = 2$ є точкою мінімуму, тобто $x_{\min} = 2$. ◀



1. Яку точку називають точкою максимуму функції? точкою мінімуму функції? критичною точкою функції?
2. Сформулюйте ознаку максимуму функції; ознаку мінімуму функції.

ВПРАВИ

- 40.1.°** На рисунку 40.18 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-10; 9]$. Укажіть: 1) критичні точки функції; 2) точки мінімуму; 3) точки максимуму.

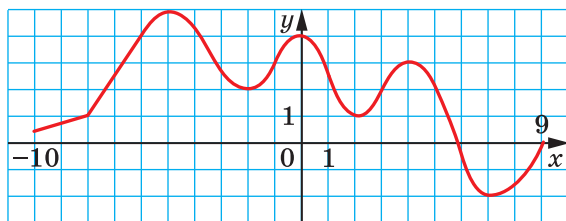


Рис. 40.18

- 40.2.°** На рисунку 40.19 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-7; 7]$. Укажіть: 1) критичні точки функції; 2) точки мінімуму; 3) точки максимуму.

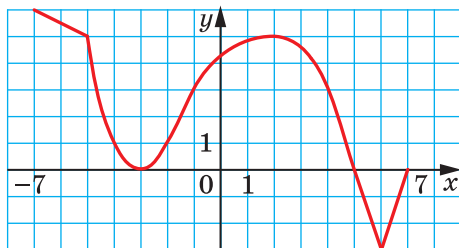


Рис. 40.19

- 40.3.°** На рисунку 40.20 укажіть графік функції, для якої точка x_0 є точкою мінімуму.

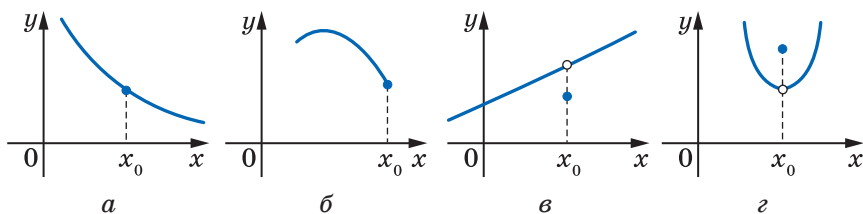


Рис. 40.20

40.4.° Чи має критичні точки функція:

- | | |
|-----------------------|-----------------------------------|
| 1) $f(x) = x$; | 4) $f(x) = \sin x$; |
| 2) $f(x) = x^5 + 1$; | 5) $f(x) = \operatorname{tg} x$; |
| 3) $f(x) = 5$; | 6) $f(x) = \sqrt{x}$? |

40.5.° На рисунку 40.21 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Чи є правильною рівність:

- | | |
|-------------------|------------------|
| 1) $f'(-3) = 0$; | 4) $f'(1) = 0$; |
| 2) $f'(-2) = 0$; | 5) $f'(2) = 0$; |
| 3) $f'(0) = 0$; | 6) $f'(3) = 0$? |

40.6.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

- | | |
|------------------------------|------------------------------------|
| 1) $f(x) = 12x - x^3$; | 3) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$; |
| 2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$; | 4) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$. |

40.7.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$; | 3) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$; |
| 2) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$; | 4) $f(x) = 2 + x^2 + 2x^3 - 2x^4$. |

40.8.* Функція $y = f(x)$ диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку 40.22 зображено графік її похідної. Укажіть точки максимуму і мінімуму функції $y = f(x)$.

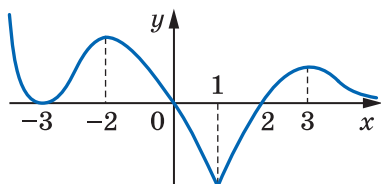


Рис. 40.21

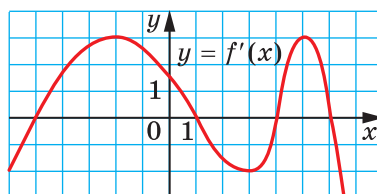


Рис. 40.22

40.9.* Функція $y = f(x)$ диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку 40.23 зображено графік функції $y = f'(x)$. Скільки точок екстремуму має функція $y = f(x)$?

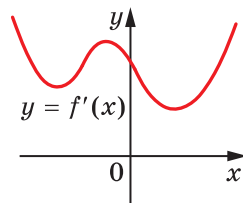


Рис. 40.23

40.10.* Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$;

2) $f(x) = (x - 1)^3(x - 2)^2$;

3) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 3$.

40.11.* Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9$; 2) $f(x) = (x + 4)^4(x - 3)^3$.

40.12.* Доведіть, що дана функція не має точок екстремуму:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 10$; 2) $f(x) = \sin x - x$.

40.13.* Доведіть, що дана функція не має точок екстремуму:

1) $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 20$; 2) $f(x) = \cos x + x$.

40.14.* Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2}$; 5) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16}$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$; 4) $f(x) = -\frac{1}{(x - 3)^2}$; 6) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

40.15.* Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$; 4) $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$;

2) $f(x) = x + \frac{9}{x}$; 5) $f(x) = \frac{1}{16 - x^2}$;

3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$; 6) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$.

40.16.* Чи є правильним твердження:

- 1) значення функції в точці максимуму може бути меншим від значення функції в точці мінімуму;
- 2) функція в точці екстремуму може бути недиференційовною;
- 3) якщо похідна в деякій точці дорівнює нулю, то ця точка є точкою екстремуму функції?

40.17.* Чи є правильним твердження:

- 1) у точці екстремуму похідна функції дорівнює нулю;
- 2) якщо функція в деякій точці недиференційовна, то ця точка є точкою екстремуму функції?

40.18.** Чи є правильним твердження: якщо $\max_M f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in M$, і функція f є диференційовною в точці x_0 , то $f'(x_0) = 0$?

40.19.** Чи може мати тільки одну точку екстремуму: 1) парна функція; 2) непарна функція; 3) періодична функція?

40.20.** Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = \frac{x}{2} - \sin x; \quad 2) f(x) = \cos 2x - x\sqrt{3}.$$

40.21.** Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = \cos x + \frac{x}{2}; \quad 2) f(x) = \sin 2x - x\sqrt{2}.$$

40.22.** При яких значеннях a функція $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$ має тільки одну критичну точку?

40.23.** При яких значеннях a функція $y = \frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 4x - 15$ має тільки одну критичну точку?

40.24.** Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = x^2\sqrt{1-x}; \quad 2) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}; \quad 3) f(x) = \frac{2x-7}{\sqrt{3-x}}.$$

40.25.** Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = x^2\sqrt{x+2}; \quad 2) f(x) = (x-2)^2\sqrt{x}; \quad 3) f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x-1}}.$$

40.26.** Точка x_0 — критична точка функції f . Для всіх $x < x_0$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, а для всіх $x > x_0$ — нерівність $f'(x) < 0$. Чи може точка x_0 бути точкою мінімуму?

40.27.** Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

$$1) f(x) = \sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad 2) f(x) = \sin^2 x - \cos x.$$

40.28.** Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

$$1) f(x) = \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right); \quad 2) f(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x - x.$$

40.29.** При яких значеннях параметра a функція

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3a+1}{2}x^2 + (2a^2 + 2a)x - 17$$

має додатну точку мінімуму?

40.30.** При яких значеннях параметра a функція

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3a-1}{2}x^2 + (2a^2 - a)x + 19$$

має додатну точку мінімуму?

40.31.** При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 1$ є точкою

мінімуму функції $y = \frac{x^3}{3} + ax^2 + (a^2 - 4)x + 7$?

40.32.** При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 0$ є точкою

максимуму функції $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 + (a^2 - 1)x - 9$?

40.33.** При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 1$ є точкою екстремуму функції $y = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x - 7$?

40.34.** При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 2$ є точкою екстремуму функції $y = x^3 - 2ax^2 + (2a^2 - 2a)x + 9$?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

40.35. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = -x^2 + 4x + 9$ на проміжку:

1) $[1; 2]$; 2) $[-1; 4]$; 3) $(2; \infty)$.

40.36. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \sin x$ на проміжку:

1) $[0; \pi]$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)$; 3) $[0; 2\pi)$.

41. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Яку кількість продукції треба випустити підприємству, щоб отримати найбільший прибуток? Як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання за найменший час? Як доставити товар у торговельні точки так, щоб витрати палива були найменшими?

З такими й подібними задачами на пошук найкращого або, як говорять, оптимального розв'язку людині досить часто доводиться стикатися у своїй діяльності.

Уявимо, що відомо функцію, яка описує, наприклад, залежність прибутку підприємства від кількості виготовленої продукції. Тоді задача зводиться до пошуку аргументу, при якому функція набуває найбільшого значення.

У цьому пункті ми з'ясуємо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку $[a; b]$. Обмежимося розглядом лише неперервних функцій.

Зауважимо, що точка, у якій функція набуває найменшого значення, не обов'язково є точкою мінімуму.

Наприклад, на рисунку 41.1 $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$,

а точок мінімуму функція f не має. Також точка мінімуму не обов'язково є точкою, у якій функція набуває найменшого значення. На рисунку 41.2, a точка x_2 — єдина точка мінімуму, а найменше значення $\min_{[a; b]} f(x)$ досягається в точці a .

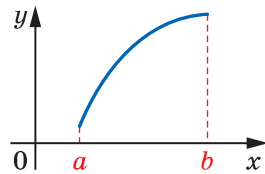


Рис. 41.1

Аналогічне зауваження стосується і точок максимуму та точок, у яких функція досягає найбільшого значення.

На рисунку 41.2 подано різні випадки розташування точок екстремумів і точок, у яких функція набуває найбільшого та найменшого значень.

Тут важливо зрозуміти, що властивість функції мати точку екстремуму x_0 означає таке: функція набуває в точці x_0 найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями функції в усіх точках деякого, можливо, дуже малого околу точки x_0 . Щоб наголосити на цьому факті, точки екстремуму називають іще **точками локального максимуму** або **точками локального мінімуму** (від латин. *locus* — місце).

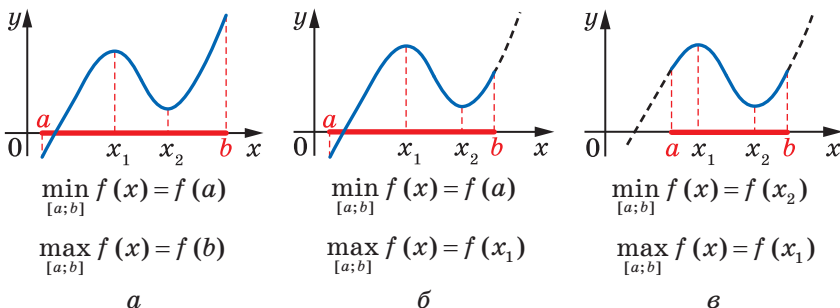


Рис. 41.2

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція набуває на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму (рис. 41.2).

Зважаючи на це, для такої функції пошук найбільшого і найменшого значень на відрізку $[a; b]$ можна проводити, користуючись такою схемою.

1. Знайти критичні точки функції f , які належать проміжку $[a; b]$.
2. Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.
3. З усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Зрозуміло, що цей алгоритм можна реалізувати лише тоді, коли розглядувана функція f має скінченну кількість критичних точок на відрізку $[a; b]$.

Якщо визначити, які з критичних точок є точками екстремуму, то кількість точок, у яких треба шукати значення функції, можна зменшити. Проте щоб виявити точки екстремуму, зазвичай потрібна більша технічна робота, ніж для обчислення значень функції в критичних точках.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на відрізку $[-2; 0]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12;$$

$$12x^2 - 18x - 12 = 0;$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, функція f має дві критичні точки, а проміжку $[-2; 0]$ належить одна: $x = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Маємо: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}, \quad f(-2) = -38, \quad f(0) = 6.$$

$$\text{Отже, } \max_{[-2; 0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}, \quad \min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = -38.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{37}{4}; -38. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Подайте число 8 у вигляді суми двох таких невід'ємних чисел, щоб сума куба першого числа та квадрата другого була найменшою.

Розв'язання. Нехай перше число дорівнює x , тоді друге дорівнює $8 - x$. З умови випливає, що $0 \leq x \leq 8$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + (8 - x)^2$, визначену на відрізку $[0; 8]$, і знайдемо, при якому значенні x вона набуває найменшого значення.

Маємо: $f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 3x^2 + 2x - 16$. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{8}{3}.$$

Серед знайдених чисел відрізку $[0; 8]$ належить тільки число 2. Отримуємо:

$$f(2) = 44, f(0) = 64, f(8) = 512.$$

Отже, функція f набуває найменшого значення при $x = 2$.

Відповідь: $8 = 2 + 6$. ◀

ПРИКЛАД 3 Знайдіть сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса R , при яких площа прямокутника набуває найбільшого значення.

Розв'язання. Розглянемо прямокутник $ABCD$, вписаний у коло радіуса R (рис. 41.3). Нехай $AB = x$, тоді $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Звідси площа прямокутника $ABCD$ дорівнює

$x\sqrt{4R^2 - x^2}$. З умови задачі випливає, що значення змінної x задовольняють нерівність $0 < x < 2R$, тобто належать проміжку $(0; 2R)$. Таким чином, задача звелася до знаходження найбільшого значення функції $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на інтервалі $(0; 2R)$.

Розглянемо неперервну функцію $f(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $D(f) = [0; 2R]$, і визначимо її найбільше значення на відрізку $[0; 2R]$.

Знайдемо критичні точки функції f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} \cdot (4R^2 - x^2)' = \\ &= \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{(4R^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Функція f має одну критичну точку $x = R\sqrt{2}$.

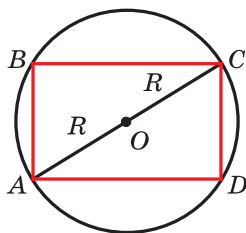


Рис. 41.3

Маємо: $f(R\sqrt{2}) = 2R^2$, $f(0) = f(2R) = 0$.

Отже, $\max_{[0; 2R]} f(x) = f(R\sqrt{2}) = 2R^2$.

Звідси отримуємо, що функція $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на інтервалі $(0; 2R)$ набуває найбільшого значення при $x = R\sqrt{2}$. Тоді $AB = R\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$.

Отже, серед прямокутників, вписаних у коло радіуса R , найбільшу площу має квадрат зі стороною $R\sqrt{2}$. ◀

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$, $D(f) = [2; 4]$. Для всіх $x \in (2; 4)$ маємо: $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}$.

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$.

Запишемо: $\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}} = 0$. Звідси легко знайти, що $x = 3$. Отже, функція f на відрізку $[2; 4]$ має єдину критичну точку $x = 3$.

Оскільки функція f є неперервною на відрізку $[2; 4]$, то її найбільше і найменше значення знаходяться серед чисел $f(3)$, $f(2)$, $f(4)$. Маємо: $f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2}$.

Таким чином, $\max_{[2; 4]} f(x) = f(3) = 2$, причому найбільшого значення функція f набуває лише при $x = 3$.

Оскільки нам потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 2$, то отримуємо, що $x = 3$ є його єдиним коренем.

Відповідь: 3. ◀



Опишіть, як знаходити найбільше і найменше значення неперервної на відрізку функції.

ВПРАВИ

41.1.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0; 2]$;

$$3) f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x - 7, [-1; 3]; \quad 4) f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}, [-3; 0].$$

41.2.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

$$1) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x, [0; 3]; \quad 3) f(x) = 2x^4 - 8x, [-2; 1];$$

$$2) f(x) = x - 1 - x^3 - x^2, [-2; 0]; \quad 4) f(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2, [-1; 2].$$

41.3.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

$$1) f(x) = \sqrt{100 - x^2}, [-6; 8]; \quad 3) f(x) = (x + 1)^2(x - 2)^2, [-2; 4];$$

$$2) f(x) = \sqrt{0,5x^2 + 3x + 5}, [2; 4]; \quad 4) f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}, [-4; -1].$$

41.4.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

$$1) f(x) = \sqrt{9 + 8x - x^2}, [0; 7]; \quad 3) f(x) = (x - 1)^2(x + 5)^2, [-3; 2];$$

$$2) f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}, [-2; 4]; \quad 4) f(x) = -x - \frac{9}{x}, [-6; -1].$$

41.5.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

$$1) f(x) = \sin x - \cos x, [0; \pi]; \quad 2) f(x) = x\sqrt{3} - \cos 2x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

41.6.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

$$1) f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x, [0; \pi];$$

$$2) f(x) = 2 \cos \left(4x + \frac{\pi}{6}\right), \left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right].$$

41.7.* Подайте число 8 у вигляді суми двох таких невід'ємних чисел, щоб добуток одного із цих чисел і куба другого числа був найбільшим.

41.8.* Подайте число 12 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб добуток квадрата одного із цих чисел і подвоєного другого числа був найбільшим.

41.9.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

$$1) f(x) = 2 \sin 2x + \cos 4x, \left[0; \frac{\pi}{3}\right];$$

$$2) f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - 5, \left[0; \frac{\pi}{3}\right].$$

41.10.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

$$1) f(x) = 2 \cos x - \sin 2x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$2) f(x) = 2\sqrt{3} \cos x + 2 \sin x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

41.11.** Розбийте число 180 на три таких невід'ємних доданки, щоб два з них відносились як 1 : 2, а добуток усіх трьох доданків був найбільшим.

41.12.** Подайте число 18 у вигляді суми трьох таких невід'ємних чисел, щоб два з них відносились як 8 : 3, а сума кубів цих трьох чисел була найменшою.

41.13.** У трикутник ABC вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на стороні AC , а дві інші — на сторонах AB і BC . Знайдіть найбільше значення площі такого прямокутника, якщо $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, де BD — висота трикутника ABC .

41.14.** У прямокутний трикутник з гіпотенузою 16 см і гострим кутом 30° вписано прямокутник, дві вершини якого лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

41.15.** У півколо радіуса 20 см вписано прямокутник найбільшої площі. Знайдіть сторони прямокутника.

41.16.** У півколо радіуса 6 см вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть сторони прямокутника.

41.17.** Дві вершини прямокутника належать графіку функції $y = 12 - x^2$, $D(y) = [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$, а дві інші — осі абсцис. Яку найбільшу площу може мати такий прямокутник?

41.18.** Дві вершини прямокутника належать графіку функції $y = 0,5x^2$, $D(y) = [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$, а дві інші — прямій $y = 9$. Яку найбільшу площу може мати такий прямокутник?

41.19.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Якою має бути довжина основи трикутника, щоб його площа набувала найбільшого можливого значення?

41.20.** У трапеції менша основа й бічні сторони дорівнюють a . Якою має бути більша основа трапеції, щоб площа трапеції була найбільшою?

41.21.** У рівнобедрений трикутник вписано коло радіуса r . Яким має бути кут при основі трикутника, щоб його площа була найменшою?

- 41.22.**** Яким має бути кут при вершині рівнобедреного трикутника заданої площі, щоб радіус вписаного в цей трикутник кола був найбільшим?
- 41.23.**** На колі радіуса R позначили точку A . На якій відстані від точки A треба провести хорду BC , паралельну дотичній у точці A , щоб площа трикутника ABC була найбільшою?
- 41.24.**** Фігуру обмежено графіком функції $y = \sqrt{x}$, прямою $y = 2$ і віссю ординат. У якій точці графіка функції $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 4$) треба провести дотичну, щоб вона відтінала від указаної фігури трикутник найбільшої площі?
- 41.25.**** На координатній площині розміщено прямокутний трикутник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$). Вершина A має координати $(-2; 0)$, вершина B належить відрізку $[2; 3]$ осі абсцис, а вершина C — параболі $y = x^2 - 4x + 1$. Якими мають бути координати точки C , щоб площа трикутника ABC була найбільшою?
- 41.26.**** Пункти A , B і C знаходяться у вершинах прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$), $AC = 285$ км, $BC = 60$ км. Пункти A і C сполучає залізниця. У яку точку відрізка AC слід провести ґрунтову дорогу з пункту B , щоб час перебування в дорозі від пункту A до пункту B був найменшим, якщо відомо, що швидкість руху залізницею дорівнює 52 км/год, а ґрунтову дорогою — 20 км/год?
- 41.27.**** Завод A розміщено на відстані 50 км від прямолінійної ділянки залізниці, яка прямує в місто B , і на відстані 130 км від міста B . Під яким кутом до залізниці слід провести шосе від заводу A , щоб доставка вантажів з A до B була найдешевшою, якщо вартість перевезення по шосе у 2 рази більша, ніж залізницею?
- 41.28.**** Доведіть нерівність $-20 \leq x^3 - 3x^2 \leq 16$, де $x \in [-2; 4]$.
- 41.29.*** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} = x^2 - 8x + 18$.
- 41.30.*** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+7} + \sqrt{1-x} = x^2 + 6x + 13$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

41.31. Обчисліть значення виразу:

$$1) \frac{\sqrt[4]{25 \sqrt[3]{5}}}{\sqrt[3]{5}}; \quad 2) \frac{\sqrt[3]{3} \sqrt{3 \sqrt[3]{3}}}{(\sqrt[4]{9} - 1)(\sqrt[4]{9} + 1)}.$$

41.32. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{3}{x+2} \geq \frac{5}{2-x}; \quad 2) \frac{2}{1-2x} \leq \frac{3}{x+5}.$$

42. Друга похідна. Поняття опуклості функції

Нехай матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$ по координатній прямій. Тоді миттєву швидкість $v(t)$ у момент часу t визначають за формулою

$$v(t) = s'(t).$$

Розглянемо функцію $y = v(t)$. Її похідну в момент часу t називають прискоренням руху та позначають $a(t)$, тобто

$$a(t) = v'(t).$$

Таким чином, функція прискорення руху – це похідна функції швидкість руху, яка у свою чергу є похідною функції закон руху, тобто

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))'.$$

У таких випадках говорять, що функція прискорення руху $y = a(t)$ є **другою похідною функції** $y = s(t)$. Записують:

$$a(t) = s''(t)$$

(запис $s''(t)$ читають: «ес два штрихи від те»).

Наприклад, якщо закон руху матеріальної точки задано формулою $s(t) = t^2 - 4t$, то маємо:

$$s'(t) = v(t) = 2t - 4;$$

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = 2.$$

Ми отримали, що матеріальна точка рухається зі сталим прискоренням. Як ви знаєте з курсу фізики, такий рух називають **рівноприскореним**.

Узагальнимо сказане.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, диференційовну на деякій множині M . Тоді її похідна також є деякою функцією, заданою на цій множині. Якщо функція f' є диференційовною в деякій точці $x_0 \in M$, то похідну функції f' у точці x_0 називають **другою похідною функції** $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають $f''(x_0)$ або $y''(x_0)$. Саму функцію f називають **двічі диференційовною в точці** x_0 .

Функцію, яка числу x_0 ставить у відповідність число $f''(x_0)$, називають **другою похідною функції** $y = f(x)$ і позначають f'' або y'' .

Наприклад, якщо $y = \sin x$, то $y'' = -\sin x$.

Якщо функція f є двічі диференційовною в кожній точці множини M , то її називають **двічі диференційовною на множині** M .

Якщо функція f двічі диференційовна на $D(f)$, то її називають **двічі диференційовною**.

Ви знаєте, що функцію характеризують такі властивості, як парність (непарність), періодичність, зростання (спадання) тощо. Ще однією важливою характеристикою функції є опуклість угору (опуклість вниз).

Звернемося до прикладів.

Про функції $y = x^2$, $y = |x|$ говорять, що вони є опуклими вниз (рис. 42.1), а функції $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$ є опуклими вгору (рис. 42.2).

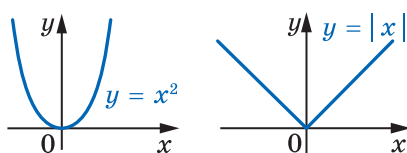


Рис. 42.1

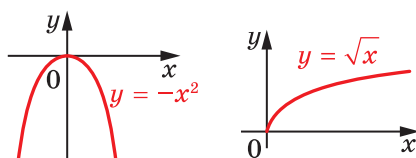


Рис. 42.2

Функція $y = \sin x$ є опуклою вгору на проміжку $[0; \pi]$ та опуклою вниз на проміжку $[\pi; 2\pi]$ (рис. 42.3). Лінійну функцію вважають як опуклою вгору, так і опуклою вниз.

Надалі, вивчаючи поняття опуклості функції на проміжку I , обмежимося випадком, коли функція f є диференційовною на цьому проміжку.

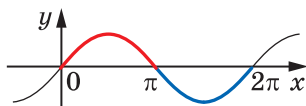


Рис. 42.3

Нехай функція f диференційовна на проміжку I . Тоді в будь-якій точці її графіка з абсцисою $x \in I$ можна провести невертикальну дотичну. Якщо при цьому графік функції на проміжку I розміщений не вище будь-якої такої дотичної (рис. 42.4), то функцію f називають **опуклою вгору на проміжку I** ; якщо ж графік на проміжку I розміщено не нижче від кожної такої дотичної (рис. 42.5) — **опуклою вниз на проміжку I** .

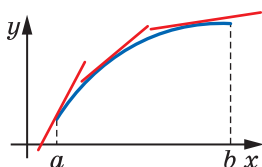


Рис. 42.4

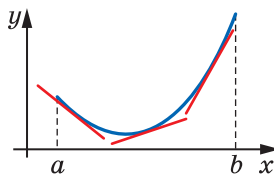


Рис. 42.5

На рисунку 42.6 зображено графік функції f , яка є опуклою вниз на проміжку $[a; b]$. З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу x кут нахилу відповідної дотичної збільшується. Це означає, що функція f' зростає на проміжку $[a; b]$.

Нехай функція f є опуклою вгору на проміжку $[a; b]$ (рис. 42.7). З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу x кут нахилу відповідної дотичної зменшується. Це означає, що функція f' спадає на проміжку $[a; b]$.

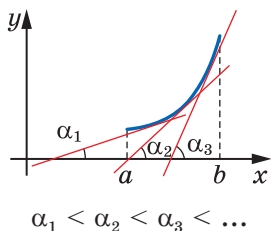


Рис. 42.6

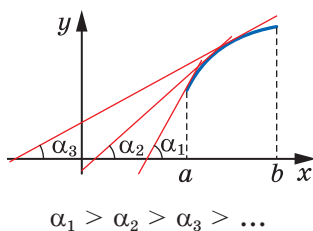


Рис. 42.7

Ці приклади показують, що характер опуклості функції f на деякому проміжку I пов'язаний зі зростанням (спаданням) функції f' на цьому проміжку.

Для двічі диференційовної на проміжку I функції f зростання (спадання) функції f' визначається знаком другої похідної функції f на проміжку I . Таким чином, характер опуклості двічі диференційовної функції пов'язаний зі знаком її другої похідної.

Цей зв'язок установлюють такі дві теореми.

Теорема 42.1 (ознака опуклості функції вниз). Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \geq 0$, то функція f є опуклою вниз на проміжку I .

Теорема 42.2 (ознака опуклості функції вгору). Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \leq 0$, то функція f є опуклою вгору на проміжку I .

Доведемо теорему 42.1 (теорему 42.2 можна довести аналогічно).

Доведення. У точці з абсцисою $x_0 \in I$ проведемо дотичну до графіка функції f . Рівняння цієї дотичної має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Розглянемо функцію $r(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$.

Значення функції r показують, наскільки відрізняється ордината точки графіка функції f від ординати відповідної точки, яка лежить на проведеній дотичній (рис. 42.8).

Якщо ми покажемо, що $r(x) \geq 0$ для всіх $x \in I$, то таким чином доведемо, що на проміжку I графік функції f лежить не нижче від проведеної до нього дотичної.

Нехай $x \in I$ і $x > x_0$ (випадок, коли $x \leq x_0$, можна розглянути аналогічно).

Маємо:

$$r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Для функції f і відрізка $[x_0; x]$ застосуємо теорему Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0)$, де $c_1 \in (x_0; x)$.

Звідси

$$r(x) = f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0); \quad r(x) = (f'(c_1) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Оскільки функція $y = f'(x)$ є диференційовною на відрізку $[x_0; c_1]$, то можна застосувати теорему Лагранжа:

$$f'(c_1) - f'(x_0) = f''(c_2)(c_1 - x_0), \text{ де } c_2 \in (x_0; c_1).$$

Звідси $r(x) = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0)$.

На рисунку 42.8 показано розміщення точок c_1 і c_2 .

З нерівностей $x_0 < c_2 < c_1 < x$ випливає, що $(c_1 - x_0)(x - x_0) > 0$. Оскільки $c_2 \in I$, то з урахуванням умови теореми отримуємо: $f''(c_2) \geq 0$. Звідси для всіх $x \in I$ виконується нерівність $r(x) \geq 0$, тому функція f є опуклою вниз на проміжку I . ◀

ПРИКЛАД 1 Дослідіть на опуклість функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

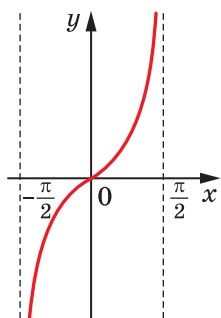


Рис. 42.9

$$\begin{aligned} \text{Звідси } f''(x) &= \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = (\cos^{-2} x)' = \\ &= -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}. \end{aligned}$$

Нерівність $f''(x) \geq 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Отже, функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вниз на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 42.9).

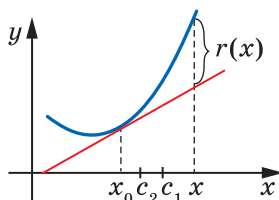


Рис. 42.8

Нерівність $f''(x) \leq 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$. Таким чином, функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вгору на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (рис. 42.9). ◀

На рисунку 42.10 зображено графіки функцій і дотичні, проведені до них у точках з абсцисою x_0 . Кожна з наведених функцій на проміжках $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$ має різний характер опуклості. Отже, на цих проміжках графік функції розташований у різних півплощинах відносно дотичної. У такому разі говорять, що точка x_0 є **точкою перегину** функції.

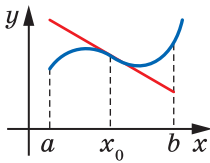


Рис. 42.10

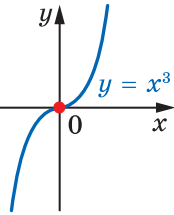
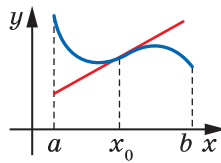


Рис. 42.11

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є точкою перегину функції $y = x^3$ (рис. 42.11); точки виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, є точками перегину функції $y = \cos x$ (рис. 42.12).

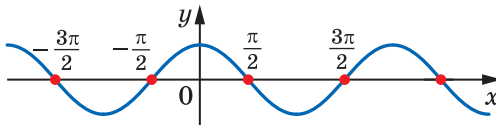


Рис. 42.12

ПРИКЛАД 2 Дослідіть характер опуклості та знайдіть точки перегину функції $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12}$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$; $f''(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.

Використовуючи метод інтервалів, дослідимо знак функції $y = f''(x)$ (рис. 42.13). Отримуємо, що функція f є опуклою вгору на проміжку $(-\infty; 1]$ та опуклою вниз на проміжку $[1; +\infty)$.



Рис. 42.13

Функція f на проміжках $(-\infty; 1]$ і $[1; +\infty)$ має різний характер опуклості. У точці з абсцисою $x_0 = 1$ до графіка функції f можна провести дотичну. Отже, $x_0 = 1$ є точкою перегину функції f . ◀

?

1. Яку функцію називають двічі диференційовною в точці? на множині?
2. Опишіть, яку функцію називають опуклою вгору; опуклою вниз.
3. Сформулюйте ознаку опуклості функції вниз; угору.
4. Опишіть, яку точку називають точкою перегину.

ВПРАВИ

42.1.° Знайдіть другу похідну функції:

- | | | |
|-------------------------|-----------------------|-----------------------------|
| 1) $y = x^2 - 2x + 5$; | 4) $y = \cos x$; | 7) $y = \sin \frac{x}{4}$; |
| 2) $y = \frac{1}{x}$; | 5) $y = (2x - 1)^5$; | 8) $y = x \sin x$. |
| 3) $y = \sqrt{x}$; | 6) $y = \cos^2 x$; | |

42.2.° Знайдіть другу похідну функції:

- | | | |
|--------------------------|------------------------|---------------------|
| 1) $y = x^4$; | 4) $y = \sqrt[3]{x}$; | 7) $y = \sin^2 x$; |
| 2) $y = 3 - 5x + x^3$; | 5) $y = (1 - 3x)^3$; | 8) $y = x \cos x$. |
| 3) $y = \frac{1}{x-1}$; | 6) $y = \cos 2x$; | |

42.3.° Чому дорівнює значення другої похідної функції $y = 5 \sin x - 3 \cos 4x$ у точці: 1) $x = \frac{\pi}{6}$; 2) $x = -\frac{\pi}{2}$?

42.4.° Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть її прискорення в момент часу $t_0 = 2$ с.

42.5.° Одне тіло рухається по координатній прямій за законом $s_1(t) = t^3 - t^2 + 3t - 2$, а друге — за законом $s_2(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 5t - 8$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть прискорення кожного тіла в момент часу, коли їхні швидкості рівні.

42.6.° Тіло масою 5 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3 - 6t + 4$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть силу $F(t) = ma(t)$, що діє на тіло через 3 с після початку руху.

42.7.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

$$1) y = x^3 - 3x + 2; \quad 2) y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1.$$

42.8.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

$$1) y = x^3 - 2x^2 + x - 2; \quad 2) y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 4.$$

42.9.° Знайдіть точки перегину функції

$$y = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 12x + 3.$$

42.10.° Знайдіть точки перегину функції

$$y = 3x^5 + 10x^4 + 10x^3 - 5x - 4.$$

42.11.° Доведіть, що функція $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 11x - 7$ є опуклою вниз на \mathbb{R} .

42.12.° Доведіть, що функція $f(x) = \sin^2 x - 2x^2$ є опуклою вгору на \mathbb{R} .

42.13.* Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

$$1) y = \frac{x}{1+x^2}; \quad 2) y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

42.14.* Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

$$1) y = \frac{1-x^2}{1+x^2}; \quad 2) y = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

42.15.* Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції $y = x^2 + 4 \sin x$.

42.16.* Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції $y = x^2 - 4 \cos x$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

42.17. Замість знака * запишіть знак \cup або \cap так, щоб утворилася правильна рівність:

$$1) A * \emptyset = A; \quad 2) A * \emptyset = \emptyset.$$

42.18. Відомо, що $A \subset B$. Замість знака * запишіть знак \cup або \cap так, щоб утворилася правильна рівність:

$$1) A * B = B; \quad 2) A * B = A.$$

43. Побудова графіків функцій

Коли вам доводилося будувати графіки, ви зазвичай робили так: позначали на координатній площині деяку кількість точок, які належать графіку, а потім сполучали їх. Точність побудови залежала від кількості позначених точок.

На рисунку 43.1 зображено кілька точок, які належать графіку деякої функції $y = f(x)$. Ці точки можна сполучити по-різному, наприклад так, як показано на рисунках 43.2 і 43.3.

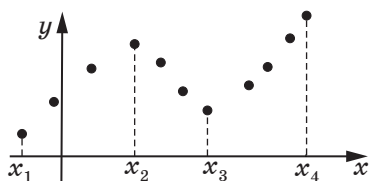


Рис. 43.1

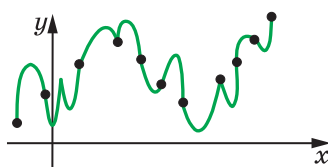


Рис. 43.2

Проте якщо знати, що функція f зростає на кожному з проміжків $[x_1; x_2]$ і $[x_3; x_4]$, спадає на проміжку $[x_2; x_3]$ та є диференційовною, то, скоріше за все, буде побудовано графік, зображений на рисунку 43.4.

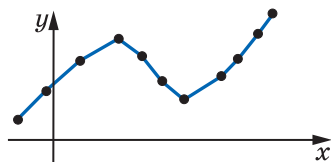


Рис. 43.3

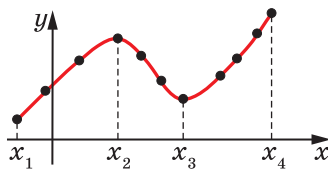


Рис. 43.4

Ви знаєте, які особливості притаманні графікам парної, непарної, періодичної функцій тощо. Узагалі, чим більше властивостей функції вдалося з'ясувати, тим точніше можна побудувати її графік.

Дослідження властивостей функції проводитимемо за таким планом.

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Знайти нулі функції.
4. Знайти проміжки знакосталості функції.
5. Знайти проміжки зростання і спадання функції.
6. Знайти точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.

7. Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).

Зауважимо, що наведений план дослідження має рекомендаційний характер і не є незмінним та вичерпним. Під час дослідження функції важливо виявити такі її властивості, які дадуть змогу коректно побудувати графік.

ПРИКЛАД 1 Дослідіть функцію $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині дійсних чисел, тобто $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Маємо: $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 - \frac{1}{4}(-x)^3 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$. Звідси $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$, тобто функція $y = f(-x)$ не збігається ні з функцією $y = f(x)$, ні з функцією $y = -f(x)$. Таким чином, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3-4. Маємо: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{x^2}{4}(6-x)$. Числа 0 і 6 є нулями функції f . Застосувавши метод інтервалів (рис. 43.5), знаходимо проміжки знакосталості функції f , а саме: установлюємо, що $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$ і $f(x) < 0$ при $x \in (6; +\infty)$.

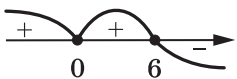


Рис. 43.5

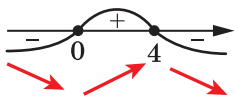


Рис. 43.6



Рис. 43.7

5-6. Маємо: $f'(x) = 3x - \frac{3x^2}{4} = \frac{3x}{4}(4-x)$. Дослідивши знак похідної (рис. 43.6), доходимо висновку, що функція f зростає на проміжку $[0; 4]$, спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0]$ і $[4; +\infty)$. Отже, $x_{\max} = 4$, $x_{\min} = 0$. Отримуємо: $f(4) = 8$, $f(0) = 0$.

7. Маємо: $f''(x) = 3 - \frac{3x}{2}$. Дослідивши знак другої похідної (рис. 43.7), робимо висновок, що функція f є опуклою вниз на проміжку $(-\infty; 2]$, опуклою вгору на проміжку $[2; +\infty)$, $x_0 = 2$ є точкою перегину і $f(2) = 4$.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 43.8). ◀

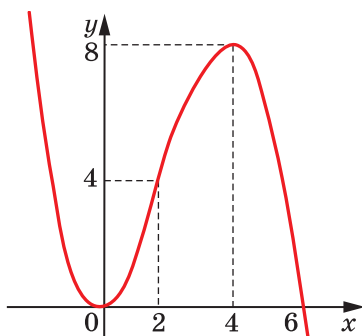


Рис. 43.8

ПРИКЛАД 2 Дослідіть функцію $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання

1. Функція визначена на множині $(-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Область визначення функції несиметрична відносно початку координат, отже, дана функція не є ні парною, ні непарною.
3. Функція не має нулів.



Рис. 43.9

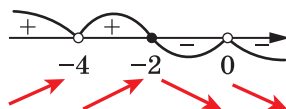


Рис. 43.10

4. Маємо: $f(x) = \frac{4}{x(x+4)}$. Звідси $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-4; 0)$ (рис. 43.9).

5–6. Маємо:

$$f'(x) = \frac{(4)' \cdot (x^2 + 4x) - 4 \cdot (x^2 + 4x)'}{x^2(x+4)^2} = -\frac{4(2x+4)}{x^2(x+4)^2} = -\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}.$$

Дослідивши знак f' (рис. 43.10), доходимо висновку, що функція f спадає на кожному з проміжків $[-2; 0)$ і $(0; +\infty)$, зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -4)$ і $(-4; -2]$, $x_{\max} = -2$, $f(-2) = -1$.

7. Зауважимо, що коли значення аргументу x вибирати все більшими й більшими, то відповідні значення функції $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ все менше й менше відрізняться від числа 0 і можуть стати

як завгодно малими. Цю властивість прийнято записувати так:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2 + 4x} = 0 \text{ або так: } \frac{4}{x^2 + 4x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty. \text{ У такому разі}$$

пряму $y = 0$ називають *горизонтальною асимптотою* графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$. Аналогічно можна встановити, що пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою графіка функції f при $x \rightarrow -\infty$.

Якщо значення аргументу x прямують до нуля, залишаючись додатними, то відповідні значення функції $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ стають

усе більшими й більшими та можуть стати більшими за довільне наперед задане додатне число. У такому разі пряму $x = 0$ називають



Рис. 43.11

вертикальною асимптотою графіка функції f , коли x прямує до нуля справа. Пряма $x = 0$ також є *вертикальною асимптотою* графіка функції f , коли x прямує до нуля зліва. Функція f має ще одну вертикальну асимптоту — пряму $x = -4$, коли x прямує до -4 як зліва, так і справа.

$$\text{Маємо: } f''(x) = -\frac{8x^2(x+4)^2 - 8(x+2)(2x(x+4))^2 + 2x^2(x+4)}{x^4(x+4)^4}.$$

$$\text{Спростивши дріб, отримаємо: } f''(x) = \frac{8(3x^2 + 12x + 16)}{x^3(x+4)^3}.$$

Дослідивши знак f'' (рис. 43.11), доходимо висновку, що функція f є опуклою вниз на проміжках $(-\infty; -4)$ і $(0; +\infty)$, опуклою вгору на проміжку $(-4; 0)$, точок перегину не має.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції f (рис. 43.12). ◀

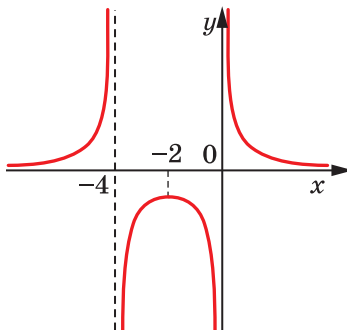


Рис. 43.12

ПРИКЛАД 3 Користуючись графіком функції $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, визначте, скільки коренів має рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a .

Розв'язання. Функція визначена на множині дійсних чисел, тобто $D(f) = \mathbb{R}$.

$$\text{Маємо: } f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Отже, функція f має три критичні точки: $-\sqrt{2}$; 0 ; $\sqrt{2}$. Дослідивши знак похідної (рис. 43.13), отримуємо: функція f зростає на проміжках $[-\sqrt{2}; 0]$ і $[\sqrt{2}; +\infty)$, спадає на проміжках $[-\infty; -\sqrt{2}]$ і $[0; \sqrt{2}]$,

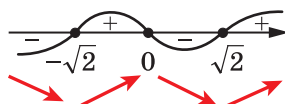


Рис. 43.13

$$x_{\min} = -\sqrt{2}, \quad x_{\min} = \sqrt{2}, \quad x_{\max} = 0. \quad \text{Маємо: } f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -1, \quad f(0) = 3.$$

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 43.14).

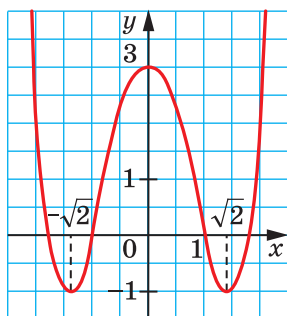


Рис. 43.14

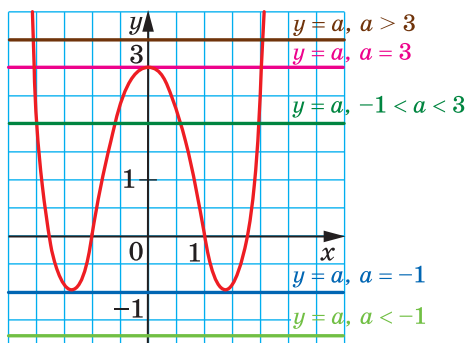


Рис. 43.15

Користуючись побудованим графіком, визначаємо кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a (рис. 43.15):

- якщо $a < -1$, то коренів немає;
- якщо $a = -1$ або $a > 3$, то два корені;
- якщо $a = 3$, то три корені;
- якщо $-1 < a < 3$, то чотири корені.

Зауваження. Із розв'язування даної задачі вилучено пункти 2–4, 7 плану дослідження властивостей функції. Властивості функції, які досліджуються в цих пунктах, не потрібні для визначення кількості коренів рівняння $f(x) = a$. ◀

ПРИКЛАД 4 Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання

1. Функція визначена на множині $(-\infty; \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}; +\infty)$.

2. Функція не є ні парною, ні непарною.

3. Розв'язавши рівняння $\frac{x^4}{x^3 - 2} = 0$, установлюємо, що $x = 0$ — єдиний нуль даної функції.

4. $f(x) > 0$ при $x \in (\sqrt[3]{2}; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \sqrt[3]{2})$.

5–6. Маємо: $f'(x) = \frac{x^6 - 8x^3}{(x^3 - 2)^2} = \frac{x^3(x^3 - 8)}{(x^3 - 2)^2}$.

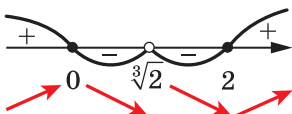


Рис. 43.16

Дослідивши знак f' (рис. 43.16), доходимо висновку, що функція f спадає на кожному з проміжків $[0; \sqrt[3]{2})$ і $(\sqrt[3]{2}; 2]$, зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0]$

і $[2; +\infty)$, $x_{\min} = 2$, $f(2) = \frac{8}{3}$, $x_{\max} = 0$, $f(0) = 0$.

7. Маємо: $f''(x) = \frac{12x^2(x^3 + 4)}{(x^3 - 2)^3}$.

Дослідивши знак f'' (рис. 43.17), доходимо висновку, що функція f є опуклою вниз на кожному з проміжків $(-\infty; -\sqrt[3]{4}]$ і $(\sqrt[3]{2}; +\infty)$, опуклою вгору на проміжку $[-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$, $x = -\sqrt[3]{4}$ — точка перегину

і $f(-\sqrt[3]{4}) = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.



Рис. 43.17

Пряма $x = \sqrt[3]{2}$ — вертикальна асимптота графіка даної функції.

Маємо: $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2} = \frac{(x^4 - 2x) + 2x}{x^3 - 2} = x + \frac{2x}{x^3 - 2}$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 - \frac{2}{x}} = 0$, то при $x \rightarrow +\infty$ відстані від

точок графіка функції f до відповідних точок прямої $y = x$ стають усе меншими й меншими та можуть стати меншими від довільного наперед заданого додатного числа. У цьому разі пряму $y = x$ називають *похилою асимптотою* графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$.

Також можна показати, що пряма $y = x$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \rightarrow -\infty$.

Ураховуючи отримані результати, будуюмо графік функції (рис. 43.18). ◀

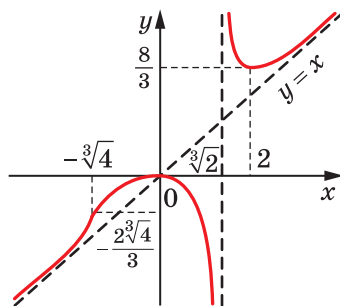


Рис. 43.18



Опишіть схему дослідження функції.

ВПРАВИ

43.1.° Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$; | 4) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3$; |
| 2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$; | 5) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; |
| 3) $f(x) = 3x - \frac{x^3}{9}$; | 6) $f(x) = (x + 3)^2 (x - 1)^2$. |

43.2.° Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$; | 3) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2$; |
| 2) $f(x) = x - x^3$; | 4) $f(x) = 8x^2 - 7 - x^4$. |

43.3.° Побудуйте графік функції:

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $f(x) = \frac{4-x}{x+2}$; | 4) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}$; | 7) $f(x) = \frac{2(x-1)}{x^2}$; |
| 2) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$; | 5) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$; | 8) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$. |
| 3) $f(x) = \frac{6x-6}{x^2+3}$; | 6) $f(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$; | |

43.4.* Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \frac{x-3}{x-1}; \quad 3) f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}; \quad 5) f(x) = \frac{3x}{x^2-9};$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x^2-2x}; \quad 4) f(x) = \frac{1}{x^2+1}; \quad 6) f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}.$$

43.5.* Побудуйте графік функції $f(x) = x^2(2x-3)$ і знайдіть, користуючись ним, кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a .

43.6.* Побудуйте графік функції $f(x) = -x^2(x^2-4)$ і знайдіть, користуючись ним, кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a .

43.7.* Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = x + \frac{1}{x}; \quad 3) f(x) = \frac{x^3}{x^2-4};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}; \quad 4) f(x) = \frac{x^4-8}{(x+1)^4}.$$

43.8.* Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = x + \frac{1}{x^2}; \quad 2) f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}; \quad 3) f(x) = \frac{x^3-4}{(x-1)^3}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

43.9. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

43.10. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5} \cos x\right) = 0$.



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 5

Границя функції

Число a називають границею функції f у точці x_0 , якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий інтервал I , який містить точку x_0 , що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Арифметичні дії з границями функцій

Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають границю в точці x_0 , то функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)g(x)$ також мають границю в точці x_0 , причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Якщо, крім цього, границя функції $y = g(x)$ у точці x_0 відмінна

від нуля, то функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також має границю в точці x_0 і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Неперервні функції

Якщо виконується рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, то функцію f називають неперервною в точці x_0 .

Якщо функція f є неперервною в кожній точці деякої множини $M \subset \mathbb{R}$, то говорять, що вона неперервна на множині M . Якщо функція f є неперервною на $D(f)$, то таку функцію називають неперервною.

Якщо функція f є диференційовною в точці x_0 , то вона є неперервною в цій точці.

Похідна

Похідною функції f у точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо функція f має похідну в точці x_0 , то цю функцію називають диференційовною в точці x_0 .

Якщо функція f диференційовна в кожній точці деякої множини M , то говорять, що вона диференційовна на множині M . Якщо функція f диференційовна на $D(f)$, то її називають диференційовною.

Знаходження похідної функції f називають диференціюванням функції f .

Геометричний зміст похідної

Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , дорівнює значенню похідної функції f у точці x_0 , тобто $k(x_0) = f'(x_0)$.

Механічний зміст похідної

Якщо $y = s(t)$ — закон руху матеріальної точки по координатній прямій, то її миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює значенню похідної функції $y = s(t)$ у точці t_0 , тобто $v(t_0) = s'(t_0)$.

Рівняння дотичної

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , має вигляд: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Нехай функція f , визначена на проміжку $[a; b]$, у точці $x_0 \in (a; b)$ набуває свого найменшого (найбільшого) значення. Якщо функція f є диференційовною в точці x_0 , то $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Якщо функція f є диференційовною на відріжку $[a; b]$, причому $f(a) = f(b)$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що $f'(x_0) = 0$.

Теорема Лагранжа. Якщо функція f є диференційовною на відріжку $[a; b]$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ознаки зростання і спадання функції

Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.

Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.

Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Точки екстремуму функції

Точку x_0 називають точкою максимуму функції f , якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f , якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.

Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f , то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційовною в точці x_0 .

Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.

Якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак із плюса на мінус, то x_0 — точка максимуму; якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 — точка мінімуму.

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція набуває на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму.

Поняття опуклості функції

Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \geq 0$, то функція f є опуклою вниз на проміжку I .

Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \leq 0$, то функція f є опуклою вгору на проміжку I .

План проведення дослідження властивостей функції

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Знайти нулі функції.
4. Знайти проміжки знакосталості функції.
5. Знайти проміжки зростання і спадання функції.
6. Знайти точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.
7. Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).

44. Вправи для повторення курсу алгебри і початків аналізу 10 класу

Множини, функції

44.1. Задайте за допомогою переліку елементів множину:

1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x(2|x|-1) = 0\}$;

2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -3 \leq x < 2\}$.

44.2. Укажіть рівні множини:

$A = \{x \mid x = 6n - 3, n \in \mathbb{N}\}$;

$C = \{x \mid x \text{ кратне } 3 \text{ і не кратне } 2\}$;

$B = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$;

$D = \{x \mid x = 6n + 3, n \in \mathbb{N}\}$.

44.3. Знайдіть нулі функції:

1) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; 2) $y = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$; 3) $y = x^3 - 4x$; 4) $y = x^2 + 1$.

44.4. Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = x^2 - 2x + 1$;

2) $y = \frac{9}{3 - x}$.

44.5. Дослідіть функцію на парність:

1) $f(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{4 + x}$;

3) $f(x) = \frac{1}{(3x - 1)^7} + \frac{1}{(3x + 1)^7}$.

2) $f(x) = \frac{|5x - 2| + |5x + 2|}{x^2 - 1}$;

44.6. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{(x - 1)^2(x - 2)}$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{3 - |x|}} + \frac{1}{x - 2}$;

2) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2(x + 2)}}$;

4) $y = \sqrt{|x + 5|(x + 2)}$.

44.7. Знайдіть область значень функції:

1) $y = 3x^2 - 2x + 1$;

3) $y = -3x^2 - x - 2$;

2) $y = x + \frac{9}{x}$;

4) $y = \frac{2x}{x^2 - 4}$.

44.8. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\sqrt{3x - 1} + 1$;

3) $y = 3(2x + 1)^2 - 2$;

2) $y = 4\sqrt{2x - 3} - 1$;

4) $y = 2(3x - 1)^2 + 1$;

5) $y = \sqrt{1 - |x|}$;

7) $y = \frac{1}{|x+1| - 3}$;

6) $y = \frac{1}{|x| - 4}$;

8) $y = (|x+1| + 2)^2$.

44.9. Скільки коренів має рівняння $|(x+1)^2 - 1| = a$ залежно від значення параметра a ?

44.10. Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 44.1, є оборотними?

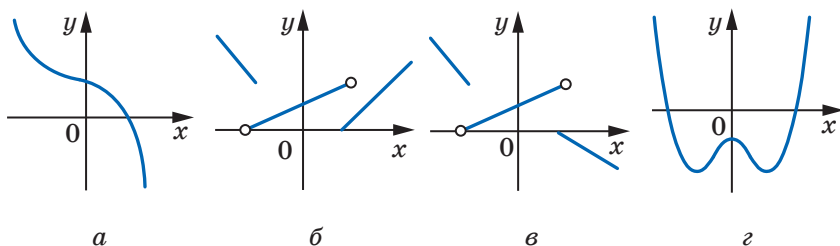


Рис. 44.1

44.11. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{1-x}{1+x}$;

2) $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & \text{якщо } x \geq 3, \\ 2x-5, & \text{якщо } x < 3. \end{cases}$

44.12. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2 - 6x)(x^2 + 5x - 6) < 0$;

5) $(x-1)(x+3)^2(x-2) < 0$;

2) $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x + 2) \geq 0$;

6) $(2x+1)^2(x^2 - 4x + 3) > 0$;

3) $4x^3 - 25x < 0$;

7) $(2x+1)^2(x-1)(x-2) \geq 0$;

4) $\frac{x^3 - 16x}{x^2 - x - 30} < 0$;

8) $(x-5)(x+4)(x^2 + 6x + 9) \geq 0$.

44.13. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 6x + 9} \geq 0$;

2) $\frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 6x + 9} < 0$.

44.14. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x-2}{x+3} \geq \frac{3x-4}{x+3}$;

2) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$.

44.15. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} \geq 0$;

2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} < 0$.

44.16. Розв'яжіть нерівність $\left| \frac{x}{x^2 - 9} \right| \leq \frac{x}{x^2 - 9}$.

44.17. Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x-5}{x-a} \geq 0;$

2) $\frac{(x+1)(x-a)}{x+1} \geq 0.$

Степенева функція

44.18. Побудуйте графік функції:

1) $y = (x+1)^4;$

3) $y = (|x| - 2)^3;$

2) $y = (x-1)^3 + 2;$

4) $y = |x+1|^3.$

44.19. Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^5, & \text{якщо } x < -1, \\ -x-2, & \text{якщо } x \geq -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

44.20. Дано функцію $f(x) = x^{-19}$. Порівняйте числа:

1) $f(1,6)$ і $f(2);$

3) $f(-9,6)$ і $f(9,6);$

2) $f(-5,6)$ і $f(-6,5);$

4) $f(0,1)$ і $f(-10).$

44.21. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-16}$. Порівняйте числа:

1) $f(1,6)$ і $f(2,2);$

3) $f(-3,4)$ і $f(3,4);$

2) $f(-4,5)$ і $f(-3,6);$

4) $f(-18)$ і $f(3).$

44.22. Побудуйте графік функції:

1) $y = (x-1)^{-3};$

2) $y = |x^{-3}|;$

3) $y = |x-1|^{-3}.$

44.23. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[3]{x-2} - 2;$

3) $y = \sqrt[4]{|x|+1};$

2) $y = \sqrt[3]{|x-1|};$

4) $y = |\sqrt[4]{x+2} - 2|.$

44.24. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$ на проміжку:

1) $[1; 2];$

2) $[-1; 1];$

3) $(-\infty; -1].$

44.25. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} = a - x;$

2) $\sqrt[4]{x} = a - x?$

44.26. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4};$ 2) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2};$ 3) $\sqrt[12]{(\sqrt{11}-3)^3};$ 4) $\sqrt[15]{(\sqrt{7}-3)^3}.$

44.27. Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{9-6\sqrt{2}} - \sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}.$

44.28. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}; \quad 2) y = \frac{x^3}{\sqrt[6]{x^6}} + 2.$$

44.29. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1} - \frac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}} \right) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1};$$

$$2) \frac{\sqrt{a}+27}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt[6]{a}-3}{\sqrt[3]{a}-3\sqrt[6]{a}+9} - \frac{\sqrt[6]{ab}-9}{\sqrt{a}+27} \right).$$

44.30. Обчисліть значення виразу:

$$1) \frac{10\,000^{0,4} \cdot 10^{0,5}}{100^{0,3} \cdot 1000^{\frac{1}{6}}}; \quad 2) \left(\frac{3^{-\frac{5}{6}} \cdot 7^{-\frac{5}{6}}}{21^{-1} \cdot 5^{\frac{1}{3}}} \right)^{-6}.$$

44.31. Спростіть вираз:

$$1) \frac{a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}} - a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{6}}} \cdot \frac{a - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}};$$

$$2) \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}};$$

$$3) \left(1 - a^{\frac{1}{36}}\right) \left(1 + a^{\frac{1}{36}} + a^{\frac{1}{18}}\right) + \frac{4 - a^{\frac{1}{6}}}{2 - a^{\frac{1}{12}}};$$

$$4) \frac{m^{\frac{4}{3}} - 27m^{\frac{1}{3}}n}{m^{\frac{2}{3}} + 3\sqrt[3]{mn} + 9n^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 3\sqrt[3]{\frac{n}{m}}\right) - \sqrt[3]{m^2}.$$

44.32. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x = \sqrt{x+5} + 1; \quad 2) 3\sqrt{x+10} - 11 = 2x.$$

44.33. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 2; \quad 2) \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1.$$

44.34. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0; \quad 2) \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4} - 2\sqrt[3]{x-2} - 3 = 0.$$

44.35. Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

$$1) x^2 - 5x + 16 - 3\sqrt{x^2 - 5x + 20} = 0; \quad 2) x^2 + 4 - 5\sqrt{x^2 - 2} = 0.$$

44.36. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y} = 1, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 7; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 8y^2 = 18 - 18y. \end{cases}$$

44.37. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 4x - 3;$$

$$2) (\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{x+1} + x^2 + x - 7) = x.$$

44.38. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt{2x-4} \geq \sqrt{5-x}; \quad 2) \sqrt{x^2+x} < \sqrt{x^2+1}.$$

44.39. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt{3x-x^2} < 4-x; \quad 3) \sqrt{2-x} > x;$$

$$2) \sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1; \quad 4) \sqrt{x^2-1} > x.$$

44.40. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} \leq 0; \quad 2) (x - 12)\sqrt{x - 3} \leq 0.$$

44.41. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-x^2} < 2$.

Тригонометричні функції

44.42. При яких значеннях a можлива рівність $\cos x = a^2 - 3$?

44.43. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу

$$2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha - \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

44.44. Дослідіть на парність функцію:

$$1) f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}; \quad 2) f(x) = x^3 + \cos x; \quad 3) f(x) = \frac{(x^2 - 1) \operatorname{ctg} x}{x^2 - 1}.$$

44.45. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sin 420^\circ; \quad 2) \cos 405^\circ; \quad 3) \operatorname{tg} 765^\circ.$$

44.46. Знайдіть головний період функції:

$$1) f(x) = \cos(3x + 1); \quad 2) f(x) = \operatorname{ctg}(-7x + 2); \quad 3) f(x) = \cos \pi x.$$

44.47. Доведіть, що функція $f(x) = \cos(\sqrt{x})^2$ не є періодичною.

44.48. Знайдіть період функції $f(x) = \operatorname{tg} \frac{4\pi x}{9} + \operatorname{ctg} \frac{9\pi x}{4}$.

44.49. Розташуйте числа в порядку зростання:

$$1) \sin 3,2; \sin 4; \sin 3,6; \sin 2,4; \sin 1,8;$$

$$2) \cos 3,5; \cos 4,8; \cos 6,1; \cos 5,6; \cos 4,2.$$

44.50. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sin x + \sin |x|; \quad 2) y = \operatorname{tg} x \cos x.$$

44.51. Чи є можливою рівність:

1) $\sin \alpha = \frac{2}{3} \operatorname{tg} 80^\circ$; 2) $\cos \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{18}$; 3) $\cos \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$?

44.52. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha - 1} + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$; 3) $\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right)$;
 2) $(\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha)^2 + (\operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha)^2$; 4) $(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta)^2 - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta)^2$.

44.53. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$.

44.54. Спростіть вираз $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$, якщо $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

44.55. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$.

44.56. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = 1$; 2) $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ + \alpha)}{2 \sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

44.57. Доведіть тотожність:

1) $\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi + x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -1$;
 2) $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^{-2}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)} = \frac{1}{|\sin \alpha \cos \alpha|}$.

44.58. Спростіть вираз:

1) $\left(\sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4}\right) \left(\sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4}\right)$; 2) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha}$.

44.59. Доведіть тотожність:

1) $\cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha = -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \cos \frac{9\alpha}{2}$;
 2) $\frac{2(\sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1)}{\cos \alpha - \sin \alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$;
 3) $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;
 4) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha - \beta) = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$;
 5) $\frac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha (1 + \cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha + \sin \alpha)(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha)} = \frac{1}{2}$;

$$6) \sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Тригонометричні рівняння і нерівності

44.60. Обчисліть значення виразу:

$$1) \cos\left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{5}{13}\right); \quad 3) \cos(\operatorname{arctg} 2);$$

$$2) \sin\left(\arccos \frac{1}{3} + \arccos \frac{2}{3}\right); \quad 4) \sin(\operatorname{arctg}(-2)).$$

44.61. Обчисліть значення виразу:

$$1) \arccos\left(\cos \frac{2\pi}{9}\right); \quad 2) \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{8}\right).$$

44.62. Розв'яжіть рівняння $\arcsin x \cdot \arccos x = -\frac{3\pi^2}{16}$.

44.63. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos \frac{x}{2} + \cos x = 0; \quad 2) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2.$$

44.64. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos^2 5x + 7 \sin^2 5x = 4 \sin 10x;$$

$$2) 3 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 14 \cos^2 x - 2 = 0.$$

44.65. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\sin^2 x + \cos x + 1 = 0.$$

44.66. Скільки коренів рівняння $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$ належать проміжку $[-\pi; \pi]$?

44.67. При яких значеннях параметра a має корені рівняння:

$$1) \sin^2 x - (3a - 3) \sin x + a(2a - 3) = 0;$$

$$2) \cos^2 x + 2 \cos x + a^2 - 6a + 10 = 0?$$

44.68. Розв'яжіть рівняння

$$\cos^3 x \sin x + \cos^2 x \sin^2 x - 3 \cos x \sin^3 x - 3 \sin^4 x = 0.$$

44.69. Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння

$$\cos^2 x - \left(\frac{7}{10} + a\right) \cos x + \frac{7a}{10} = 0 \text{ має на проміжку } \left[\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right]:$$

$$1) \text{ один корінь}; \quad 2) \text{ два корені}.$$

44.70. При яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 x + (2a + 3) \times \sin x - a^2 = 0$ має:

$$1) \text{ один корінь на проміжку } [0; \pi];$$

- 2) один корінь на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)$;
- 3) один корінь на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$;
- 4) два корені на проміжку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$;
- 5) три корені на проміжку $[0; 2\pi)$;
- 6) чотири корені на проміжку $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right)$?

44.71. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$; 2) $\cos 9x = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$.

44.72. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \sin x \sin 2x + \cos 3x = 0$; 2) $\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 15^\circ) = 0,5$.

44.73. Розв'яжіть рівняння $(x + y)^2 + 10(x + y) \cos(\pi xy) + 25 = 0$.

44.74. Розв'яжіть рівняння $y^2 - 3\sqrt{2}(\cos x - \sin x)y + 9 = 0$.

44.75. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\frac{3}{4}; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{3}, \\ \sin \pi x + \sin \pi y = 1; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = 0,25. \end{cases}$$

44.76. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = 0$;

3) $\frac{3 \sin^2 2\pi x + 7 \cos 2\pi x - 3}{4x^2 - 7x + 3} = 0$.

2) $\frac{\cos 2x - 2 \cos x + 1}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0$;

44.77. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$;

2) $\frac{\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x}{1 + \cos x} = 0$.

44.78. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 0$;

2) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0$.

44.89. Чому дорівнює значення похідної функції f у точці x_0 , якщо:

$$1) f(x) = \frac{8}{x} + 5x - 2, \quad x_0 = 2; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2} - 2 \sin x, \quad x_0 = 0?$$

44.90. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = \frac{1}{x^9} - \frac{3}{x^3}; \quad 2) y = (x + 1)^3 (x - 2)^4.$$

44.91. Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , якщо:

$$1) f(x) = 0,5x^2 - 2x + 2, \quad x_0 = 0; \quad 2) f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

44.92. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 5x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -x$.

44.93. Визначте, чи є пряма $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ дотичною до графіка функції $y = \sqrt{x}$. У разі ствердної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

44.94. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 4$, якщо ця дотична проходить через точку $M(2; -1)$.

44.95. У якій точці графіка функції $y = x + \frac{3}{x}$ треба провести дотичну, щоб ця дотична перетнула вісь ординат у точці $(0; 6)$?

44.96. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

$$1) f(x) = x^2 + 4x - 7; \quad 3) f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1;$$

$$2) f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9; \quad 4) f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}.$$

44.97. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$.

44.98. При яких значеннях параметра a функція $y = (a + 2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ спадає на \mathbb{R} ?

44.99. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}; \quad 2) f(x) = \frac{x - 1}{x^2}; \quad 3) f(x) = (1 - x)\sqrt{x}.$$

44.100. Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції $f(x) = \sin x - \cos x + x$.

44.101. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ на відрізку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Відповіді та вказівки до вправ

1.21. $A = C$, $B = \emptyset$. *Вказівка.* Підставте в дану рівність замість X множини C , а потім замість X порожню множину.

2.1. 1) $(-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (7; +\infty)$; 2) $[4; 6) \cup (6; +\infty)$. 2.5. 1) 1; 2) 1; 3) $[0; +\infty)$. 2.6. 1) $(-\infty; 0]$; 2) 3. 2.7. 2) $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$. 2.8. 3) (1; 3), (3; $+\infty$). 2.14. 3) $\{-1\} \cup [3; +\infty)$. 2.15. 2) $(-3; -1) \cup (-1; +\infty)$; 3) $\{-4\} \cup [3; +\infty)$.

2.16. 1) $\min_M f(x) = 1$, найбільшого значення не існує; 2) $\min_{[-4; 4]} f(x) = 0$, $\max_{[-4; 4]} f(x) = 4$. 2.17. 1) $\max_M f(x) = 13$, найменшого значення не існує;

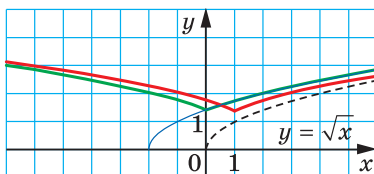
2) $\min_{[0; 2]} f(x) = 0$, $\max_{[0; 2]} f(x) = 1$. 2.18. 0. 2.20. 0. 2.21. 0. 2.22. 2; 5. 2.23. -3;

-1. 2.24. 1) $(-\infty; -\frac{23}{8}]$; 2) $(-\infty; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$. 2.25. 1) $[\frac{19}{20}; +\infty)$;

2) $(-\infty; \frac{2}{5}) \cup (\frac{2}{5}; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. 2.26. 1) 2; 2) 2; 3) 1. 2.27. 0.

2.28. 0. 2.29. 1) $x = 0$; 2) $x = -5$. 2.30. 1) (0; 2]; 2) (-5; -3].

3.9. 3) Див. рисунок. *Вказівка.* Скористайтеся схемою: $y = \sqrt{x} \rightarrow y = \sqrt{x+2} \rightarrow y = \sqrt{|x|+2} \rightarrow y = \sqrt{|x-1|+2}$. 3.11. 1) Якщо $a < 0$, то



До задачі 3.9 (3)

коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 1$, то 2 корені; якщо $a = 1$, то 3 корені; якщо $0 < a < 1$, то 4 корені; 2) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$, то 3 корені; якщо $0 < a < 1$, то 6 коренів; якщо $a = 1$, то 4 корені; якщо $a > 1$, то 2 корені; 3) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 2$, то 1 корінь; якщо $0 < a < 2$, то 2 корені. 3.12. 3) Якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $a = 3$, то 4 корені; якщо $0 < a < 1$, то 8 коренів;

якщо $a = 1$, то 7 коренів; якщо $1 < a < 3$, то 6 коренів; якщо $a > 3$, то

2 корені. 3.15. $a = 0$ або $a = 2$. 3.16. $a = 1$ або $a = -\frac{1}{3}$. 3.17. $a = -\frac{1}{2}$. 3.18. $a = \frac{8}{3}$.

3.19. 1) (-1; -4), (-3; -18); 2) (9; -1), (-1; 9); 3) *Вказівка.* Зробіть заміну $x + y = t$, $xy = u$. 3.20. 10 км/год, 12 км/год.

4.4. 3) $y = \frac{1-x}{2x}$. 4.5. 1) $y = 5(x - 3)$. 4.10. *Вказівка.* Нехай функція f

непарна, функція g — обернена до неї. Маємо: $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = x_0$. Тоді $g(-y_0) = g(-f(x_0)) = g(f(-x_0)) = -x_0 = -g(y_0)$. 4.11. 1) 1; 2) -7; 3) 1 корінь при будь-якому c . 4.12. 2) Коренів немає.

5.1. 3) $(-1; \frac{1}{2}) \cup (3; +\infty)$. 5.5. 1) $(-\infty; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; +\infty)$; 2) $[0; 1) \cup [3; 7)$;

3) $(-\infty; -1) \cup [\frac{1}{2}; 2] \cup (4; +\infty)$. 5.6. 2) $(-6; -3] \cup [4; 6)$; 3) $(-\infty; -1] \cup (-\frac{3}{4}; \frac{1}{3}) \cup$

$\cup (1; +\infty)$. 5.7. 2) $\left(-\frac{5}{3}; 2\right)$. 5.8. 1) $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right) \cup (2; +\infty)$; 2) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$. 5.9. 1) (2; 4) \cup (4; 5); 2) [2; 5]; 3) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2] \cup \{4\} \cup [5; +\infty)$. 5.10. 1) (-2; 1); 2) [-2; 1] \cup {3}; 3) $(-\infty; -2) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. 5.11. 1) $(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$; 2) [-5; 3] \cup (3; 4]; 3) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$; 5) (-4; 1) \cup (1; 2); 6) (-4; 2). 5.12. 5) (0; 1); 6) $\left(-3; \frac{3}{4}\right) \cup [2; 6]$. 5.13. 1) $(-\infty; -2) \cup [-1; +\infty)$; 2) [-2; -1]; 3) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$;

4) (-3; 1) \cup [5; + ∞). 5.14. 1) $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right)$; 2) $(-\infty; -5] \cup \{1; 3\}$. 5.15.

1) (1; 2,5) \cup (3; + ∞); 2) [1; 2] \cup {-2}. 5.16. 1) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 2\right)$; 2) $(-\infty; -4) \cup$ $\cup (-4; -3] \cup \left[-\frac{2}{5}; 1\right) \cup [3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3] \cup [0; 2)$; 4) $\left[-\frac{3}{4}; -2\right) \cup (3; +\infty)$.

5.17. 1) [1; 3]; 2) $(-\infty; -2] \cup \{1\} \cup (5; +\infty)$; 3) (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (4; + ∞).

5.18. 1) $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup (-1; 0) \cup (1; \sqrt{3}]$; 2) [-4; -3] \cup (-2; 2) \cup (3; 4]. 5.19.

1) $(-\infty; 0) \cup (1; 6)$; 2) $(-\infty; -4) \cup (-3; 3) \cup (6; +\infty)$. 5.20. 1) {-2, 2}; 2) $(-\infty; -2] \cup$ $\cup [2; +\infty)$; 3) [1; 2] \cup {5}; 4) $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [5; +\infty)$. 5.21. 1) (3; 7); 2) [-2; 3] \cup {7}; 3) \emptyset ; 4) {-4, 4}. 5.22. 1) Якщо $a = 3$, то розв'язків немає; якщо $a < 3$, то $a < x < 3$; якщо $a > 3$, то $3 < x < a$; 2) якщо $a \leq 3$, то $x > 3$; якщо $a > 3$, то $3 < x < a$ або $x > a$; 3) якщо $a < 3$, то $x \geq 3$ або $x = a$; якщо $a \geq 3$, то $x \geq 3$;

4) якщо $a \leq -5$, то $x < a$; якщо $a > -5$, то $x < -5$ або $-5 < x < a$; 5) якщо $a < -5$, то $x \leq a$ або $x = -5$; якщо $a \geq -5$, то $x \leq a$; 6) якщо $a = -1$, то $x < -1$; якщо $a < -1$, то $x < a$ або $a < x \leq -1$; якщо $a > -1$, то $x \leq -1$.

6.11. $b = -5$. 6.12. $a = -3, b = -6, c = 8$. 6.13. $a = 1, b = 1$ або $a = 3, b = -1$.

6.14. 1) -1; -3; -5; 2) -1; 2; $-\frac{1}{2}$; 3) 1; -1; $-\frac{2}{3}$; 4) 1; -2. 6.15. 1) 1; $-\sqrt{3}-1$;

$\sqrt{3}-1$; 2) 2; -3; 3) -1; -2; 4) 1; -1; $-\sqrt{5}-2$; $\sqrt{5}-2$. 6.16. Вказівка. Розгляньте даний вираз як многочлен відносно a з параметрами b і c . Покажіть, що b є коренем цього многочлена. 6.18. 12 год. 6.19. 11 год.

7.5. $\frac{n}{2n+1}$. 7.6. $\frac{n}{n+1}$. 7.9. 1) Вказівка. $3^{2k+3} + 2^{k+3} = (3^{2k+1} + 2^{k+2}) \cdot 2 + 7 \cdot 3^{2k+1}$;

2) Вказівка. Достатньо показати, що різниця $(6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2}) - 19(6^{2k} + 19^k - 2^{k+1})$ кратна 17. 7.10. 1) Вказівка. $7^{k+2} + 8^{2k+1} = 7(7^{k+1} + 8^{2k-1}) + 57 \cdot 8^{2k-1}$.

8.7. 4) $\min_{(-\infty; -2]} f(x) = 256$, найбільшого значення не існує; 5) $\min_{(-2; 1)} f(x) = 0$,

найбільшого значення не існує. 8.9. 1) Непарним; 2) парним; 3) визначити неможливо. 8.10. 1) 1; 2) -1; 1. Вказівка. Розгляньте функцію $f(x) = 2x^4 + x^{10}$. Вона є парною, тому досить знайти невід'ємні корені даного рівняння. На проміжку $[0; +\infty)$ функція f є зростаючою, отже, рівняння $f(x) = 3$ на цьому проміжку має не більше одного кореня. 8.11. 1) -1; 2) -1; 1.

8.12. Якщо $-1 < a \leq 0$, то $\min_{[-1; a]} f(x) = f(a) = a^8$, $\max_{[-1; a]} f(x) = f(-1) = 1$; якщо $0 < a \leq 1$, то $\min_{[-1; a]} f(x) = f(0) = 0$, $\max_{[-1; a]} f(x) = f(-1) = 1$; якщо $a > 1$, то $\min_{[-1; a]} f(x) = f(0) = 0$, $\max_{[-1; a]} f(x) = f(a) = a^8$. **8.13.** Якщо $a < -2$, то $\min_{[a; 2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max_{[a; 2]} f(x) = f(a) = a^6$; якщо $-2 \leq a \leq 0$, то $\min_{[a; 2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max_{[a; 2]} f(x) = f(2) = 64$; якщо $0 < a < 2$, то $\min_{[a; 2]} f(x) = f(a) = a^6$, $\max_{[a; 2]} f(x) = f(2) = 64$. **8.14.** 1. *Вказівка.* Перепишіть рівняння у вигляді $\frac{2}{x^{17}} + \frac{3}{x^9} = 5$ і виконайте заміну $\frac{1}{x} = t$. **8.15.** -1.

9.3. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. **9.6.** 1) $\max_{[\frac{1}{2}; 1]} f(x) = 64$, $\min_{[\frac{1}{2}; 1]} f(x) = 1$; 2) $\max_{[-1; \frac{1}{2}]} f(x) = 64$, $\min_{[-1; \frac{1}{2}]} f(x) = 1$; 3) $\max_{[1; +\infty)} f(x) = 1$, найменшого значення не існує; 4) найбільшого значення не існує, $\min_{[-1; 0]} f(x) = 1$.

9.7. 1) $\max_{[\frac{1}{3}; 2]} f(x) = 27$, $\min_{[\frac{1}{3}; 2]} f(x) = \frac{1}{8}$; 2) $\max_{[-2; -1]} f(x) = -\frac{1}{8}$, $\min_{[-2; -1]} f(x) = -1$; 3) найбільшого значення не існує, $\min_{(-\infty; -3]} f(x) = -\frac{1}{27}$; 4) найбільшого значення не існує, $\min_{(0; 2]} f(x) = \frac{1}{8}$.

9.8. 1) 4 розв'язки; 2) 2 розв'язки. **9.9.** 1) 3 розв'язки; 2) 2 розв'язки. **9.10.** 1) Визначити неможливо; 2) парним; 3) визначити неможливо.

10.3. 2) 56. **10.4.** 2) $58 \frac{1}{3}$. **10.5.** 1) \mathbb{R} ; 2) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; 3) $[3; +\infty) \cup \{0\}$. **10.6.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; 3) $[6; +\infty) \cup \{0\}$. **10.7.** 1) $[-2; +\infty)$; 2) \mathbb{R} ; 3) $[0; +\infty)$. **10.8.** 1) $[-4; +\infty)$; 2) \mathbb{R} ; 3) $[0; +\infty)$. **10.9.** 3) 4 і 5; 4) -5 і -4. **10.14.** 1) $(-\infty; -3) \cup [-1; 1] \cup (3; +\infty)$; 2) $[-6; 3]$. **10.15.** 1) $(-\infty; -6) \cup \{-4; 4\} \cup (6; +\infty)$; 2) $(-4; -3] \cup (3; +\infty)$. **10.16.** 1) -1; 2) -1; 3) **10.17.** 1) -3; 2) 2; 2) -3; 1. **10.20.** 1) $\max_{[-3; -1]} f(x) = \sqrt[4]{3}$, $\min_{[-3; -1]} f(x) = 1$; 2) $\max_{[-1; 2]} f(x) = \sqrt[4]{2}$, $\min_{[-1; 2]} f(x) = 0$; 3) найбільшого значення не існує, $\min_{[-3; +\infty)} f(x) = 0$. **10.21.** 3) Найбільшого значення не існує, $\min_{(-\infty; 2]} f(x) = 0$.

10.22. 1) $(-\infty; 21)$; 2) $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$; 3) $(4; +\infty)$.

10.23. 1) $(-1; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{5}; 16\right]$; 3) $[-5; -2) \cup (2; 5]$. **10.24.** 1) Якщо $a \leq -1$, то 1 корінь; якщо $a > -1$, то 2 корені; 2) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a \geq 0$, то 1 корінь; 3) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $0 \leq a < 1$ або $a > 1$, то 2 корені. **10.25.** 1) Якщо $a \geq -1$, то 1 корінь; якщо $a < -1$, то

2 корені; 2) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $a \geq 0$ і $a \neq 1$, то 2 корені. **10.26.** 27. *Вказівка.* Функція $y = \sqrt[4]{x-26} + \sqrt[3]{x}$ є зростаючою. **10.27.** 10. **10.28.** (3; 3). *Вказівка.* Скористайтеся тим, що функція $f(t) = t + \sqrt[6]{t}$ зростає на $D(f)$. **10.29.** (1; 1), (-1; -1). **10.30.** 2. *Вказівка.* Скористайтеся нерівністю $\sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{27}$.

11.7. 2) $\sqrt[30]{b^7}$; 3) $\sqrt[3]{x^2}$; 4) $\sqrt[12]{128}$. **11.8.** 3) $\sqrt[6]{x^5}$; 4) $\sqrt[3]{a}$. **11.15.** 1) $a \leq 0$, $b \leq 0$; 2) $a \geq 0$, $b \leq 0$; 3) a і b — довільні числа. **11.16.** 2) [3; 7]. **11.17.** 2) c^4 . **11.19.** 1) $m^2 \sqrt[4]{-m}$; 2) $2m^4 n^4 \sqrt[4]{2m^2 n}$; 3) $a^2 b^3 \sqrt[4]{b}$; 4) $|x| \cdot y \sqrt[5]{y}$; 5) $a^3 b^3 \sqrt[4]{a^3 b^3}$; 6) $-a^3 b^6 \sqrt[8]{-ab^2}$. **11.20.** 1) $-2a \sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a \sqrt[4]{-a}$; 3) $ab \sqrt[6]{ab}$; 4) $a^3 b^3 \sqrt[6]{a^2 b}$. **11.21.** 1) $\sqrt[4]{2a^4}$; 2) $\sqrt[4]{mn}$; 3) $-\sqrt[6]{6a^3 b^4}$; 4) $-\sqrt[4]{a^5 b^6}$; 5) $\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b \geq 0$; $-\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b < 0$; 6) $-\sqrt[6]{-a^7}$. **11.22.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{a^7}$; 3) $\sqrt[4]{6a^4 b^4}$; 4) $-\sqrt[8]{3a^4 b^3}$; 5) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **11.23.** 1) 1; 2) 2. **11.24.** 1) 1; 2) $\sqrt{23}$. **11.27.** 1) $\sqrt[6]{x}$; 2) $-\sqrt[4]{a}$; 3) $\sqrt[6]{a^2 - 1}$. **11.32.** $\frac{1}{\sqrt[32]{2-1}}$. **11.33.** Якщо $a = 1$, то 2^6 ; якщо $a \neq 1$, то $\frac{a-1}{\sqrt[64]{a-1}}$.

12.1. 2) $\frac{5}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **12.2.** 4) 4. **12.3.** 2) [3; $+\infty$); 3) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$.

12.5. 4) 4. **12.6.** 2) 49; 4) 32. **12.7.** 2) $(\sqrt[8]{a})^8$. **12.11.** 1) $a^{0,5} - 2b^{0,5}$; 6) $3^{\frac{1}{5}}$.

12.12. 2) $1 + \frac{b}{a^2}$; 3) $x^{2,5} y^{2,5} \cdot \frac{x^{0,5} - y^{0,5}}{x^{0,5} + y^{0,5}}$; 6) $2^{\frac{1}{2}}$. **12.13.** 1) [2; $+\infty$); 2) (2; $+\infty$).

12.15. 1) $12\frac{4}{9}$; 2) 2; 3) $\frac{2}{15}$; 4) 3. **12.16.** 1) 7; 2) 10; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 21. **12.17.** 1) 125;

2) 6; 3) коренів немає. **12.18.** 1) $\frac{1}{9}$; 3) 5. **12.21.** 1) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$; 2) -1.

12.22. $\frac{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}$. **12.23.** 2^{77} . **12.24.** 2^{-7} . **12.26.** 24, якщо $a = 1$; $\frac{a^{7,4} - a^{0,2}}{a^{0,3} - 1}$, якщо

$a \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$. **12.27.** $\frac{b^{12,8} + b^{3,3}}{b^{0,1} + 1}$.

13.1. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) коренів немає; 4) 3. **13.2.** 2) Коренів немає; 3) -5; 7;

4) 7. **13.3.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) $\frac{6-\sqrt{6}}{3}$; 5) 3; 6) -4. **13.4.** 1) -5; 2) 0;

3) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$; 4) 5. **13.8.** 1) 6; 2) $\frac{14+\sqrt{7}}{2}$; 3) -1; 3) 4) -2. **13.9.** 1) 2; 2) $22-\sqrt{464}$.

13.10. 1) 6; 9; 2) $\frac{137}{16}$; 3) $6-4\sqrt{2}$; 4) 1; -3. **13.12.** 1) 4; 2) 2; 3) коренів не-

має; 4) 7; 8. **13.13.** 1) -1 ; 2) 6. **13.14.** 1) 27; 2) [5; 10]; 3) коренів немає.
13.15. 1) 10; 2) $[-4; +\infty)$. **13.16.** 1) 2; $\frac{-2-4\sqrt{13}}{3}$; 2) -2 ; 1; 13. **13.17.** 1) 0; 2;
 2) -2 ; $\frac{-2+2\sqrt{91}}{3}$. **13.18.** При $a < \frac{1}{4}$ коренів немає, при $a \geq \frac{1}{4}$ $x = a - \sqrt{a}$.

Вказівка. $x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2$. **13.19.** При $a < 1$ коренів немає, при
 $a \geq 1$ $x = a - 2\sqrt{a}$. **13.20.** $\frac{1}{5} \leq a < \frac{1}{3}$ або $a = \frac{8}{15}$. *Вказівка.* Розгляньте гра-
 фіки функцій $y = ax - 1$ та $y = \sqrt{8x - x^2} - 15$. **13.21.** $1 < a \leq 3$ або $a = 2 - \sqrt{2}$.

14.1. 1) 8; 2) 0; 1; 3) $\frac{9}{8}$; 4) 8. **14.2.** 1) -4 ; 11; 2) -61 ; 3) 0; 1; 4) 2, 8;
 $-1, 1$. **14.3.** 1) -1 ; 4; 2) -2 ; 5; 3) -4 ; 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{22}}{2}$; 4) 1024. **14.4.** 1) -1 ; 5;
 2) 1; 2; 3) 1; 2; 4) -6 ; 4. **14.5.** 1) (9; 4), (4; 9); 2) (8; 1), (1; 8); 3) (41; 40);
 4) $(-2; 3)$, (12; 24). **14.6.** 1) (27; 1), $(-1; -27)$; 2) (4; 1), (1; 4); 3) (2; 3), $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$;
 4) (6; 3), (3; 1, 5). **14.7.** 1. *Вказівка.* Скористайтесь заміною $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = t$
 або властивостями зростаючих і спадних функцій. **14.8.** 3. *Вказівка.* За-
 міна $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} = y$. **14.9.** 3. **14.10.** $1 + \sqrt{6}$. *Вказівка.* Заміна $\frac{x}{\sqrt{2x+5}} = t$.

14.11. 3; $\frac{81-9\sqrt{97}}{8}$. *Вказівка.* Поділіть обидві частини рівняння на x^2 .
14.12. 1; $\frac{1+\sqrt{109}}{18}$. **14.13.** -2 ; 5. *Вказівка.* Нехай $\sqrt[3]{x+3} = a$, $\sqrt[3]{6-x} = b$. Тоді
 $a^3 + b^3 = 9$. **14.14.** -3 ; 4. **14.15.** 8. **14.16.** $-\frac{17}{5}$; $\frac{63}{5}$. **14.17.** 10. *Вказівка.* За-

міна $\sqrt[3]{x-2} = a$, $\sqrt{x-1} = b$. Тоді $a^3 - b^2 = -1$. Інше розв'язання можна отри-
 мати, якщо врахувати зростання функції $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x-1}$. **14.18.** 1; 2;
 10. **14.19.** 1. *Вказівка.* Нехай $\sqrt{2-x} = y$. Тоді можна отримати систему

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} = y, \\ \sqrt{2-y} = x. \end{cases} \quad \mathbf{14.20.} \quad \mathbf{2.}$$

15.1. 1) $[0; +\infty)$; 2) (4; $+\infty$); 3) $[-8; -4]$; 4) $(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$. **15.2.**
 1) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$; 2) \emptyset . **15.3.** 1) $\left(3; \frac{24}{5}\right]$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $[-1; 0) \cup (0, 6; 1]$;
 4) $[1; 6]$. **15.4.** 1) $\left[2\frac{2}{9}; 4\right) \cup (5; +\infty)$; 2) (3; $+\infty$); 3) $[-2; -1, 6] \cup [0; 2]$; 4) \emptyset .
15.5. 1) $[-7; 2]$; 2) $\left[\frac{8}{3}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$; 4) (3; 5]. **15.6.** 1) $[-2; 2]$;

2) $[-7; 1]$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$. **15.7.** 1) 4; 2) $[-2; 4] \cup [5; +\infty)$.

15.8. 1) $\{-2, 1\} \cup [3; +\infty)$; 2) $[-4; -3] \cup [3; 4]$. **15.9.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup (5; +\infty)$;

2) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$; 3) $[-4; 1] \cup \{2\}$; 4) $(-\infty; -1] \cup [4; 6) \cup (8; +\infty)$. **15.10.**

1) $(-1; +\infty)$; 2) $[-20; 0) \cup (5; +\infty)$; 3) $\{-4\} \cup [2; 3]$; 4) $[-7; -5]$. **15.11.** 1) $(1; +\infty)$;

2) $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}; +\infty\right)$. **15.12.** 1) $[6; +\infty)$; 2) $\left(\frac{16}{5}; 4\right)$. **15.13.** $[1; +\infty)$. *Вказівка.*

Скористайтеся тим, що функція $y = \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x^3+x+6}$ є зростаючою.

15.14. $[-2; 2)$. **15.15.** $a = \frac{7}{40}$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що графіком

функції $y = \sqrt{1-(x+2a)^2}$ є півколо радіуса 1 із центром у точці $A(-2a; 0)$.

15.16. $a = \frac{7}{20}$. **15.18.** 1) $\frac{12}{3c-1}$; 3) $\frac{a-1}{a}$.

16.3. 2) $\frac{9\pi}{2}$. **16.10.** 1) $(0; -1)$; 3) $(0; 1)$; 6) $(1; 0)$. **16.11.** 2) $(-1; 0)$; 5) $(-1; 0)$.

16.12. 3) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 4) $2\pi; -2\pi$. **16.13.** б) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **16.14.** б) $\frac{7\pi}{15} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

16.15. 1) $(0; -1)$; 2) $(0; 1), (0; -1)$; 3) $(1; 0), (-1; 0)$. **16.17.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

2) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **16.18.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **16.20.** 1) $\{\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$; 2) \emptyset ; 3) $\left\{\frac{\pi n}{3} | n \in \mathbb{Z}\right\}$;

4) $\left\{\frac{3\pi}{2} + 3\pi n | n \in \mathbb{Z}\right\}$. **16.21.** 1) $\{\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$; 2) $\{2\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$; 3) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n | n \in \mathbb{Z}\right\}$;

4) $\left\{\frac{\pi}{3} + \pi n | n \in \mathbb{Z}\right\}$.

17.1. 2) -3 ; 3) $\frac{7}{4}$. **17.2.** 2) 9. **17.3.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **17.4.** 1) Ні;

3) так. **17.5.** 1) 3; 1; 3) 1; 0. **17.6.** 2) $-1; -3$; 4) 10; 4. **17.9.** 1) $a = 0$;

2) $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$; 3) $1 \leq a \leq 2$ або $3 \leq a \leq 4$. **17.10.** 1) $1 \leq a \leq 3$; 2) таких

значень a не існує; 3) $a = 1$. **17.13.** 1) Найбільшого значення не існує;

$\frac{1}{2}$ — найменше; 2) найбільше значення 1, найменшого не існує; 3) най-

більшого і найменшого значень не існує. **17.14.** 1) $-\frac{1}{3}$; -1 ; 2) найбільшого

і найменшого значень не існує; 3) 1; -1 . **17.15.** 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[0,5; +\infty)$;

3) $(-\infty; -\frac{2}{7}] \cup [2; +\infty)$. **17.16.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

17.20. 12 год і 24 год. **17.21.** 60 год і 84 год.

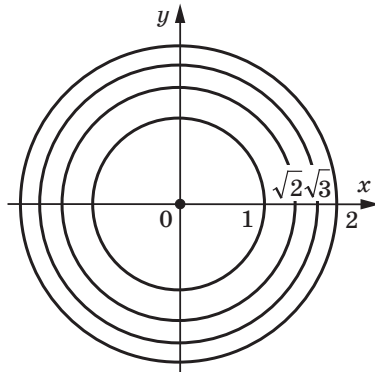
18.3. 1) 2; 2) 4. 18.4. 1) 1,5; 2) $4\sqrt{3}-3$. 18.9. 1) $2 \sin \alpha$; 2) $-2 \cos \alpha$; 3) 0. 18.10. 1) 0; 2) 0; 3) $-2 \operatorname{ctg} \beta$. 18.11. 1) II; 3) I або II. 18.12. 2) IV; 4) I або III. 18.13. $x = 1$ або $x = 9$. 18.14. $x = 2$ або $x = \frac{4}{3}$.

19.1. 1) $\sqrt{3}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 19.2. 1) 1; 3) $\frac{1}{2}$. 19.5. 2) 1; 3) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{6}$. 19.6. 3) 4.

19.8. п. 19.9. п. 19.10. *Вказівка.* Якщо припустити, що дана функція є періодичною з періодом T , то обов'язково одне із чисел $0 - T$ або $0 + T$ не належатиме області визначення, тоді як $0 \in D(f)$. 19.12. 1) 4π ; 2) $\frac{40\pi}{3}$; 3) 6; 4) 2. 19.13. 1) 10π ; 3) 14. 19.14. $a = 0$. 19.15. $a = 0$. 19.16. $a = -1$ або $a = \frac{1}{5}$. 19.17. $a = -1$; 0; $\frac{1}{3}$. 19.18. 1; -1 ; 5; -5 . *Вказівка.* Рівність

$\cos n(x+5\pi) \sin \frac{15(x+5\pi)}{n^2} = \cos nx \sin \frac{15x}{n^2}$ має виконуватися при всіх $x \in \mathbb{R}$, а при $x = 0$ маємо: $\cos 5\pi n \sin \frac{75\pi}{n^2} = 0$. Оскільки $\cos 5\pi n \neq 0$, то $\sin \frac{75\pi}{n^2} = 0$; $\frac{75\pi}{n^2} = \pi k$; $\frac{75}{n^2} = k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що n^2 — дільник числа 75.

20.3. 2) $\cos 20^\circ > \cos 21^\circ$; 4) $\cos \frac{10\pi}{9} < \cos \frac{25\pi}{18}$; 6) $\sin 2 > \sin 2,1$. 20.4. 2) $\sin \frac{5\pi}{9} > \sin \frac{17\pi}{18}$; 4) $\cos \frac{10\pi}{7} > \cos \frac{11\pi}{9}$. 20.15. 1) Так; 2) ні. 20.20. 1) Див. рисунок. *Вказівка.* $\pi(x^2 + y^2) = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x^2 + y^2 = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$



До задачі 20.20 (1)

20.22. $-8\pi < a < -6\pi$ або $6\pi < a < 8\pi$. 20.23. 1) $[-2; 0) \cup [5; +\infty)$; 2) $[-3; 2) \cup (2; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{3}{2}\right) \cup (4; +\infty)$. 20.24. 1) 1; 2) 1.

21.1. 4) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1,5$; 5) $\operatorname{ctg}(-40^\circ) < \operatorname{ctg}(-60^\circ)$. **21.2.** 1) $\operatorname{tg} 100^\circ > \operatorname{tg} 92^\circ$;
 4) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8} > \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12}$; 6) $\operatorname{ctg}(-3) < \operatorname{ctg}(-3,1)$. **21.3.** Парна. **21.4.** Не є ні парною, ні непарною. **21.9.** 1) Ні. *Вказівка.* $\operatorname{tg} 80^\circ > \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$; 2) ні.
21.13. 1) Множина прямих виду $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, з яких «виколото» точки, ординати яких мають вигляд $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Дане рівняння рівно-

сильне системі $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \sin y \neq 0, \\ \cos y \neq 0. \end{cases}$ **21.15.** 1) 125; 2) 2.

22.1. 1) $\frac{2}{\cos^2 \alpha}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\sin \alpha}$; 4) $\cos^2 \alpha$; 5) $-\operatorname{ctg} \gamma$; 6) $\sin^4 \alpha$; 7) 1;
 8) $\frac{1}{\cos \alpha}$. **22.2.** 1) $\frac{2}{\sin^2 \beta}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos \beta}$; 4) $\operatorname{tg}^2 \alpha$; 5) -1 ; 6) $-\cos^2 \alpha$. **22.3.**

2) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$; 3) $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$.

22.4. 1) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}$; 4) $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos \alpha = -\frac{7}{\sqrt{50}}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{7}$. **22.5.** 2) *Вказівка.* Розгляньте різницю лівої і правої частин

даної рівності та доведіть, що вона дорівнює нулю. **22.9.** 1) $-\frac{1}{2}$. *Вказівка.*

Поділіть чисельник і знаменник даного дробу на $\cos \alpha$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) -27 . *Вка-*

зівка. Помножьте чисельник даного дробу на $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$. **22.10.** 1) $-\frac{16}{11}$;

2) $\frac{125}{357}$. **22.11.** 1) $-\sin \beta - \cos \beta$; 2) $-\sin \alpha \cos \beta$; 3) 1. **22.12.** 1) $\frac{1}{\sin \alpha}$;

2) $2\operatorname{ctg} \alpha$; 3) -1 . *Вказівка.* Оскільки $\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \pi$, то $\cos \frac{2\pi}{3} \geq \cos \alpha$. **22.13.**

1) $\frac{b^2 - 1}{2}$. *Вказівка.* $b^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$; 2) $\frac{b(3 - b^2)}{2}$;

3) $\frac{1 + 6b^2 - 3b^4}{4}$. **22.14.** 1) $b^2 - 2$; 2) $b(b^2 - 3)$; 3) $\frac{b + 2}{b}$. *Вказівка.* З умови ви-

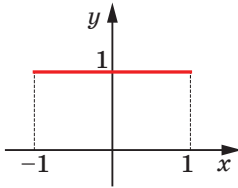
пливає, що $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = b$. Звідси $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{b}$. **22.15.** 1) $3\frac{1}{8}$, -3 . *Вка-*

зівка. $2 \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha = 2(1 - \sin^2 \alpha) - 3 \sin \alpha = -2 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha + 2$. Позна-

чимо $\sin \alpha = t$ і розглянемо функцію $f(t) = -2t^2 - 3t + 2$, визначену на проміжку $[-1; 1]$. Це квадратична функція зі старшим від'ємним коефі-

цієнтом $a = -2$. Вона набуває найбільшого значення в точці $t_0 = -\frac{-3}{2 \cdot (-2)} = -\frac{3}{4}$,

яка належить проміжку $[-1; 1]$. Отже, $\max_{[-1; 1]} f(t) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 2 = 3\frac{1}{8}$. Для знаходження найменшого значення обчислимо значення функції $f(t)$ на кінцях проміжку $[-1; 1]$: $f(-1) = -2 + 3 + 2 = 3$, $f(1) = -2 - 3 + 2 = -3$. Отже, $\min_{[-1; 1]} f(t) = -3$; 2) найбільшого значення не існує, найменше дорівнює -1 ; 3) 0 ; $-1\frac{1}{8}$; 4) найбільшого і найменшого значень не існує.



До задачі 22.17 (1)

1) $3\frac{1}{3}$; -2 ; 2) $3\frac{1}{8}$; 2 ; 3) найбільшого і найменшого значень не існує. 22.17. 1) Див. рисунок; 2) пряма $y = -1$, з якої «виколото» точки виду $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; -1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. 22.19. 1. Вказівка. Скористайтеся тим, що $\sin^4 x \leq \sin^2 x$ і $\cos^4 x \leq \cos^2 x$. 22.20. 1; -1 .

23.1. 3) $\cos \beta$. 23.2. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos(\alpha + \beta)$. 23.3. 1) -1 ; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 23.4. 1) $\sqrt{3}$. 23.7. $-\frac{31\sqrt{2}}{82}$. 23.8. $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. 23.9. $-\frac{24}{25}$. 23.10. $-\frac{297}{425}$. 23.11. 2. 23.12. 5. 23.15. 1) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$; 2) $\cos 2\alpha$. 23.16. 1) 1 ; 2) -1 . 23.17. 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\sqrt{3}-2$. 23.18. 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. 23.19. 1) $\sqrt{3}$; 2) 1 . 23.20. 1) $\sqrt{3}$; 2) 1 . 23.23. 1) 2 ; 2) $\sqrt{41}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{5}$. 23.24. 1) 2 ; 2) 5 ; 3) $\sqrt{10}$. 23.25. $\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{10}$. Вказівка. $\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right)$. 23.26. $-0,6$. 23.27. $\frac{48+25\sqrt{3}}{11}$. 23.28. $\frac{\sqrt{3(1-b^2)}-b}{2}$. 23.29. $-\frac{\pi}{4}$. 23.30. 60° . 23.31. 120° . 23.32. 1) Із графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ вилучіть точки, абсиси яких дорівнюють $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 23.34. Вказівка. З рівності $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ випливає, що $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$. Тоді $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\pi - \gamma)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) + \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} \gamma(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) + \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$. 23.38. Вказівка. Скористаємося тотожністю для кутів трикутника (див. задачу 23.35): $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1$. Маємо: $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \right.$

$$+\left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}-\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right)^2) \geq 0. \text{ Звідси } \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}-1 \geq 0. \text{ 23.39. Вказівка.}$$

Розгляньте вираз $\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}+\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right)^2$ і скористайтеся результатами задачі 23.38.

24.3. 1) $-\cos \alpha$; 2) 1; 3) 2; 4) 2; 5) $-\operatorname{tg}^2 \alpha$. 24.5. 1) 1; 2) 0; 3) 0. 24.6. 1) -1 ; 2) 1; 3) 0. 24.8. Вказівка. Оскільки $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{11}+\frac{5\pi}{22}=\frac{\pi}{2}$, то $\cos^2 \frac{3\pi}{8}=\sin^2 \frac{\pi}{8}$ і $\cos^2 \frac{5\pi}{22}=\sin^2 \frac{3\pi}{11}$. 24.9. 1) $\cos^2 \alpha$; 2) $\frac{1}{\cos^2(\alpha+10^\circ)}$. 24.10. 1) 7; 2) -3 ; 3) -2 ; 4) 1. 24.11. 4 %.

25.1. 1) $\cos^2 \alpha$; 2) $\sin 25^\circ$; 3) $\cos \alpha+\sin \alpha$; 4) $\cos \frac{\alpha}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha$; 7) $\sin 2\alpha$; 8) $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2\alpha$. 25.2. 1) 1; 2) $\cos 35^\circ-\sin 35^\circ$; 3) 1; 4) $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$; 5) $2 \sin 2\alpha$; 6) $\frac{1}{2} \cos 2\alpha$; 7) $-\sin 2\beta$; 8) $\sin 3\alpha$. 25.5. 2) $-4 \sqrt{5}$. 25.6. 2) $-\frac{24}{7}$.

25.10. 1) 1; 2) $\operatorname{ctg} 4\alpha$. 25.11. $\sin \alpha=\frac{5}{13}$, $\cos \alpha=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha=-\frac{5}{12}$. 25.12. $-0,8$.

25.13. $\sin \alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. 25.14. $\sin \frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos \frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

25.15. 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 5) $-(1+\sqrt{2})$; 6) $\sqrt{2}-1$.

25.16. 1) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$; 2) 2; 3) $\sin 4\alpha$; 4) $\sin 2\alpha$; 5) $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$; 6) $\cos \alpha$. 25.17. 1) $\sin 2\alpha$; 2) $4 \sin \alpha$; 3) $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$. 25.24. $\frac{1}{2}$. 25.25. $-\frac{1}{2}$. 25.26. $\frac{47}{37}$. 25.27. $\frac{57}{7}$. 25.28. 2.

25.29. $-\frac{8}{9}$. 25.30. $\frac{3}{4}$. 25.31. 1) $\cos 4\alpha$; 2) $\sin 8\alpha$; 3) $\operatorname{tg}^4 \alpha$; 4) -1 . 25.32. 1) $\frac{1}{4}$;

2) $\operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}$; 3) $\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2\alpha$; 4) $-\frac{1}{2}$. 25.35. 1) $\frac{3+\cos 4\alpha}{4}$; 2) $\frac{17+14 \cos 4\alpha+\cos^2 4\alpha}{32}$.

25.36. $\frac{10+3 \sqrt{3}}{16}$. 25.38. 1) $\operatorname{ctg}^4 \frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 25.39. 1) -2 ; 2) 0. 25.40. 1) 4;

2) $-\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. 25.45. 1) $\cos \frac{\alpha}{4}$; 2) $\sqrt{2} \operatorname{ctg} 2\alpha$; 3) $\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$. 25.46. 1) Якщо

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, то $2 \cos \alpha$; якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $2 \sin \alpha$; 2) $\cos \frac{\alpha}{8}$; 3) $2 \cos \frac{\alpha}{2}$.

25.47. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Вказівка. Маємо: $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$. Тоді $\sin (2 \cdot 18^\circ)=$

$=\cos (3 \cdot 18^\circ)$; $2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ=4 \cos^3 18^\circ-3 \cos 18^\circ$; $2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ=$

$=\cos 18^\circ (4 \cos^2 18^\circ-3)$; $2 \sin 18^\circ=4 \cos^2 18^\circ-3$; $2 \sin 18^\circ=4 (1-\sin^2 18^\circ)-3$;

$2 \sin 18^\circ=4-4 \sin^2 18^\circ-3$; $4 \sin^2 18^\circ+2 \sin 18^\circ-1=0$. Розгляньте останню

рівність як квадратне рівняння відносно $\sin 18^\circ$ і врахуйте, що $\sin 18^\circ > 0$.

25.48. Вказівка. Скористайтеся методом математичної індукції.

- 26.1.** 1) $\operatorname{tg} 5\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg} 3\alpha$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **26.2.** 1) $\frac{\cos \alpha}{\cos 4\alpha}$; 2) $\operatorname{tg} 6\alpha$; 3) 1.
- 26.3.** 1) $4 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $4 \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2} \times$
 $\times \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi + \alpha}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}{\sin \alpha}$. **26.4.** 1) $4 \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)$;
 2) $4 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$; 3) $4 \cos\left(\frac{\pi + \alpha}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi - \alpha}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos \alpha}$.
- 26.5.** 1) $\sin 3\alpha$; 2) 0,5. **26.6.** 1) $\cos \alpha$; 2) $\frac{1}{2}$. **26.13.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) $-\sin 2\alpha$.
- 26.14.** 1) 1; 2) $\sin 2\alpha$. **26.19.** 1) *Вказівка.* Помножте та поділіть ліву частину рівності на $2 \sin \frac{\pi}{7}$. **26.21.** 1) $y = (x - 2)^3 + 1$; 2) $y = \sqrt[3]{x+3} - 3$.
- 26.22.** Зменшилася на 9 %.
- 27.3.** 2) $\pm \frac{\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm 3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **27.4.** 2) $\pm \frac{25\pi}{6} + 10\pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **27.5.** 2) $12 + 6\pi + 12\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{24} \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 27.6.** 2) $\pm \frac{3\pi}{2} - 6 + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **27.7.** 4 корені. **27.8.** $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.
- 27.9.** 2) $\left(\frac{5}{6} + 2k\right)^2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\left(-\frac{5}{6} + 2n\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$; 3) розв'язків немає. **27.10.**
 1) $\frac{64}{(8k+1)^2}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\frac{64}{(8n-1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$; 2) $\pm \arccos \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\pm \arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$. **27.11.** $a = \frac{1}{2}$. **27.12.** $a = 0$. **27.13.** $a \in \left[\frac{7\pi}{3}; +\infty\right)$. **27.14.** $a \in \left[\frac{8\pi}{3}; +\infty\right)$.
- 27.15.** Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $a = -1$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $-1 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, то 2 корені; якщо $\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корені. **27.16.** Якщо $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 0$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $0 \leq a < 1$, то 2 корені. **27.17.** $a < \pi$, або $a > \frac{3\pi}{2}$, або $a = \frac{7\pi}{6}$. **27.18.** $a < 0$, або $a > \frac{\pi}{2}$, або $a = \frac{\pi}{4}$. **27.19.** 1) 1; 2) $a^{\frac{3}{4}}$.
- 27.20.** 1) $\left[0; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$; 4) $[0; 4]$.

- 28.3. 2) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{(-1)^{n+1}}{8} \arcsin \frac{2}{9} + \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$. 28.4. 3) $(-1)^{n+1} \times$
 $\times \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 28.6. 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + 20 + 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 28.7. $-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}$.
- 28.8. 6 коренів. 28.9. 1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi + 4\pi n,$
 $\frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 28.10. 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 28.11.
- 2) $\left(2k - \frac{1}{2}\right)^2, k \in \mathbb{N}$; 3) $\pm \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 28.12. 1) $\frac{81}{(3k + (-1)^{k+1})^2}, k \in \mathbb{N}$;
 2) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 28.13. $a \geq \frac{17\pi}{6}$. 28.14. $a \leq -\frac{13\pi}{6}$. 28.15. 1) Якщо $a < -1$
 або $a > 1$, то коренів немає; якщо $a = -1$, або $-\frac{1}{2} < a < 0$, або $a = 1$, то 1 ко-
 рінь; якщо $-1 < a \leq -\frac{1}{2}$ або $0 \leq a < 1$, то 2 корені; 2) якщо $a < -1$ або $a > 1$,
 то коренів немає; якщо $a = 1$, або $a = -1$, або $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, то 1 корінь;
 якщо $-1 < a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, то 2 корені; 3) якщо $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq 0$, то
 3 корені; якщо $0 < a < 1$ або $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 2 корені; якщо $a = -1$ або $a = 1$,
 то 1 корінь; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає. 28.16. 1) Якщо $a \leq -\frac{1}{2}$
 або $a > 1$, то коренів немає; якщо $-\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо
 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a < 1$, то 2 корені; 2) якщо $-1 < a \leq -\frac{1}{2}$, то 3 корені; якщо $-\frac{1}{2} < a < 1$
 або $a = -1$, то 2 корені; якщо $a = 1$, то 1 корінь; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то
 коренів немає. 28.17. Якщо $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, або $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$,
 то 4 корені; якщо $a = -1$, або $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a = 1$, то 3 ко-
 рені; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то 2 корені. 28.18. Якщо $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, або
 $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, то 4 корені; якщо $a = -1$, або $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, або
 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $a = 1$, то 3 корені; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то 2 корені.
- 29.3. 1) $-\frac{4\pi}{21} + \frac{4\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{6}{11} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z}$. 29.4. 2) $\frac{5\pi}{3} + 2\pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$. 29.5. 2) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 29.6. 3) $-\frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

29.7. 2) $\frac{16}{(4k+1)^2}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; 3) $(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$, $(-1)^k \arcsin \left(-\frac{2}{3}\right) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

29.8. 1) $\frac{8}{20k+5}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{16}{(4\pi k - \pi)^2}$, $k \in \mathbb{N}$; 3) $\pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k$, $\pm \arccos \left(-\frac{3}{4}\right) +$

$+ 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 29.9. 1) $a < -\frac{1}{3}$, або $-\frac{1}{3} < a < 0$, або $a > 0$; 2) $-1 < a < -\frac{1}{2}$, або

$-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, або $\frac{1}{2} < a < 1$. 29.10. 1) $a < -\frac{1}{2}$, або $-\frac{1}{2} < a < 0$, або $a > 0$;

2) $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$. 29.11. $a = -\frac{\pi}{3}$, або $a \leq -\frac{\pi}{2}$,

або $a \geq 0$. 29.12. $a = -\frac{\pi}{4}$, або $a \leq -\frac{\pi}{2}$, або $a \geq 0$. 29.14. 2) $y = -\sqrt{x+1}$.

30.1. 1) $[0; 2]$; 2) $[0; 1]$; 3) $(-\infty; -\pi-4] \cup [\pi-4; +\infty)$. 30.2. 1) $\left[-\frac{\pi}{2}-1; 1-\frac{\pi}{2}\right]$;

2) $[2; 3]$; 3) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. 30.3. 1) \mathbb{R} ; 2) $[1; +\infty)$. 30.4. \mathbb{R} . 30.5. 1) π ;

0; 2) $2 + \pi$; 2. 30.6. 1) 2π ; π ; 2) $\frac{\pi}{2} + 1$; $-\frac{\pi}{2} + 1$. 30.7. 1) $\left(2-\frac{\pi}{2}; 2+\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$.

30.8. 1) $(4; \pi+4)$; 2) $\left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. 30.9. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\cos \frac{1}{2}$; 3) коренів немає.

30.10. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) коренів немає; 3) $\frac{3}{2}$. 30.11. 1) 1; 2) $\operatorname{tg} 1$; 3) коренів немає.

30.12. 1) -1; 2) коренів немає; 3) коренів немає. 30.13. 1) $(-1; 1]$; 2) $[-1;$

$1]$; 3) розв'язків немає; 6) $(-1; 1]$. 30.14. 1) $\{-1\}$; 2) $[-1; 1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $[-1;$

$1]$; 5) розв'язків немає. 30.15. 1) $[-1; 1]$; 2) $\{-1\}$; 3) $\{0\}$. 30.16. 1) $[-1; 1]$;

2) $\{1\}$; 4) $\{1\}$. 30.17. 1) $\left[4; \frac{\pi}{2}+4\right]$; 2) $\left(-\infty; -\frac{2}{\pi}\right] \cup \left[\frac{2}{\pi}; +\infty\right)$; 3) $\left[\sqrt{\frac{1}{\pi}}; +\infty\right)$.

30.18. 1) $\left[2; \frac{\pi}{2}+2\right]$; 2) $\left[\frac{1}{\pi}; +\infty\right)$; 3) $\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}; +\infty\right)$. 30.19. $\left(-\infty; -\frac{2}{\pi}\right] \cup \left(\frac{2}{\pi}; +\infty\right)$.

30.20. $\left(\frac{1}{\pi}; +\infty\right)$. 30.23. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{24}{25}$. Вказівка. $\sin \left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right) =$

$= 2 \sin \left(\arcsin \frac{3}{5}\right) \cos \left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$; 3) $\frac{3}{4}$. 30.24. 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{26}}$.

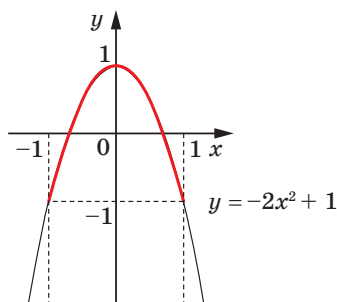
30.25. 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{7}{\sqrt{50}}$. 30.26. 1) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$; 2) $\frac{13}{85}$. 30.27. 1) $x = 2$. Вказівка.

$\cos(\arccos(4x-9)) = 4x-9$ лише за умови $|4x-9| \leq 1$; 2) $[-3; -1]$. Вказівка.

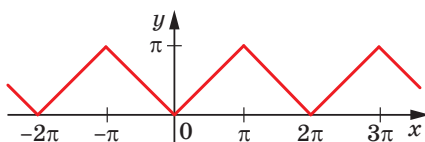
Множина коренів цього рівняння — його область визначення. 30.28. 1) $\frac{1}{3}$. Вказівка. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} |4x-1| \leq 1, \\ 4x-1 = 3x^2; \end{cases}$

- 2) $[0; 2]$. 30.29. 1) $\left[0; \frac{3}{4}\right]$; 2) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}+10}{6}; 2\right]$. 30.30. 1) $\left[0; \frac{2-\sqrt{2}}{8}\right]$;
 2) $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}; 1\right]$; 3) $\left[\frac{3}{7}; \frac{8+\sqrt{3}}{14}\right)$. 30.31. 1) $\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{5}; +\infty\right)$; 2) $(2-\sqrt{3}; +\infty)$.
 30.32. $\left(-\infty; \frac{21-\sqrt{3}}{9}\right)$. 30.33. 3) Див. рисунок. *Вказівка.* Зауважимо, що

$D(y) = [-1; 1]$. Запишемо: $\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2 \sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2$. Отже, шуканий графік — частина параболи $y = -2x^2 + 1$; 4) *Вказівка.* Оскільки $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то $y = 1$. Проте шуканий графік — це не пряма $y = 1$, а лише її відрізок, оскільки $D(y) = [-1; 1]$. 30.34. 2) *Вказівка.* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; 3) *Вказівка.* $\cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$ за умови $|x| \leq 1$. 30.35. 1) *Вказівка.* $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ при будь-якому x .



До задачі 30.33 (3)



До задачі 30.37

- 30.36. 2) *Вказівка.* $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$. 30.37. Див. рисунок. 30.40. 1) $\frac{3\pi}{7}$;
 2) $\pi - 3$; 3) $\frac{5\pi}{2} - 8$; 4) $-\frac{3\pi}{13}$; 5) $5 - 2\pi$; 6) $-\frac{5\pi}{42}$. 30.41. 1) $\frac{7\pi}{9}$. *Вказівка.*
 $\cos \frac{11\pi}{9} = \cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{9}\right)$; 2) $2\pi - 6,28$; 3) $\frac{9\pi}{2} - 12$; 4) $\frac{4\pi}{11}$; 5) $\frac{7\pi}{2} - 10$.
 30.42. $x = \frac{1}{2}$ або $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Вказівка.* Тотожність $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ дає

змогу перейти до системи
$$\begin{cases} (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}, \\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
 Після очевидної

$$\text{заміни } \arcsin x = t, \arccos x = z \text{ отримуємо: } \begin{cases} t^2 + z^2 = \frac{5\pi^2}{36}, \\ t + z = \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq z \leq \pi. \end{cases} \quad \mathbf{30.43.} \quad -\sqrt{3}. \quad \mathbf{30.44.}$$

Вказівка. Вигідно довести таку рівність: $\arcsin \frac{3}{5} = \arcsin \frac{56}{65} - \arcsin \frac{5}{13}$.
Значення виразів, записаних у лівій і правій частинах цієї рівності, належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тобто проміжку, на якому функція $y = \sin x$

зростає, тому достатньо довести, що $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \sin\left(\arcsin \frac{56}{65} - \arcsin \frac{5}{13}\right)$.

30.46. 20 %. **30.47.** 10 %.

31.1. 1) $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 4 + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} 4 + \pi n,$

$n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.2.** 1) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

3) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4} + \pi n, -\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.3.**

1) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi n, \pm\left(\pi - \arccos \frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm 2\pi + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

4) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$; 7) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,$

$\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 8) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.4.** 1) $(-1)^{n+1} \pi + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} 2 + \pi n,$

$n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{6} + \pi n, \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.5.** 1) $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} - \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$;

2) $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi n\right), \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n; \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

31.6. 1) $\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right), \left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

31.7. 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n, -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi n,$

$-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.8.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

2) $\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.9.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \arcsin \frac{1 - \sqrt{10}}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

- 3) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.10.** 1) $\pm \arccos \frac{\sqrt{29}-2}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.11.** 1) $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. **31.12.** $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.13.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -2 \arctg \frac{11}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $2 \arctg (-1 \pm \sqrt{5}) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.14.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2 \arctg 4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, 2 \arctg 2\sqrt{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.15.** 1) $\pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.16.** 1) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.
- 31.17.** 1) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{3\pi}{3} + 2\pi n, \pm \left(\pi - \arccos \frac{2}{3} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $5 \left(3 \cos x + \frac{1}{\cos x} \right) + 2 \left(9 \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) + 5 = 0$. Зробіть заміну $3 \cos x + \frac{1}{\cos x} = y$, тоді $9 \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = y^2 - 6$. **31.18.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x) + (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) - 4 = 0$. Зробіть заміну $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = y$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{17}-5}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **31.19.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}, (-1)^{n+1} \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. **31.20.** 1) $3\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \arccos \frac{1-\sqrt{13}}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 31.21.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi n, \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $\cos 4x = \frac{1 + \cos 6x}{2}$; $4 \cos^2 2x - 2 = 1 + 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x$; $4 \cos^3 2x - 4 \cos^2 2x - 3 \cos 2x + 3 = 0$; $4 \cos^2 2x (\cos 2x - 1) - 3 (\cos 2x - 1) = 0$; $(4 \cos^2 2x - 3)(\cos 2x - 1) = 0$; 3) $\frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.
- 31.22.** 1) $\frac{\pi n}{2}, \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.23.** 1) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.24.** 1) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.25.** $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.26.** $(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{29}-5}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 31.27.** 1) $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 1$; 2) $\pi n, \arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Виконайте заміну $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = t$.
- 31.28.** $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **31.29.** 1) $\frac{5\pi}{6} \leq a < \pi$; 2) $\frac{3\pi}{2} \leq a < \frac{11\pi}{6}$.

31.30. 1) $\frac{11\pi}{6} \leq a < 2\pi$; 2) $\frac{4\pi}{3} \leq a < \frac{3\pi}{2}$. **31.31.** 1) $a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a > 1$;
 2) $a = 1$ або $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a < 0$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leq 1$ або $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a < \frac{\sqrt{2}}{2}$. **31.32.** 1) $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 або $a = -\frac{1}{3}$, або $a < -1$; 2) $\frac{1}{2} < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a = -1$; 3) $-\frac{1}{3} < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ або
 $-1 \leq a < -\frac{1}{3}$. **31.33.** $a < 0$, або $a = 2$, або $a = 3$, або $a > 4$. *Вказівка.* Покажіть,

що друге рівняння рівносильне сукупності
$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{a-2}{2}. \end{cases} \quad \mathbf{31.34.} \quad a = 2. \text{ Вка-}$$

зівка. Зауважимо, що число $\frac{\pi}{3}$ є коренем першого рівняння при всіх значеннях a . Підставляючи $x = \frac{\pi}{3}$ у друге рівняння, отримуємо $2a^2 - 5a + 2 = 0$.

Звідси $a = 2$ або $a = \frac{1}{2}$. Залишається перевірити знайдені значення параметра. **31.35.** 2) 252; 3) $-1; \frac{1}{2}$.

32.1. 1) $\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.2.** 1) $\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \operatorname{arccotg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.3.** 2) $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}, \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.
32.4. $\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$. **32.5.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pi n, \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{2\pi n}{5}, \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.6.** 1) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi n, (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}, (-1)^n \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, (-1)^n \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. **32.7.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$;
 3) $2\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{4}, -\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
32.8. 1) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
 4) $\frac{\pi n}{2}, \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. **32.9.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;

- 3) $-60^\circ + 180^\circ n$, $40^\circ + 180^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.10.** 1) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 2) $\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.11.** 1) -2 ; 2) коренів немає. **32.12.** 1) 2 ; 2) коренів
 немає. **32.13.** 1) $x = 2\pi n$, $y = \frac{1}{2}$ або $x = \pi + 2\pi n$, $y = -\frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.14.** $x = -4$,
 $y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ або $x = 4$, $y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.15.** 1) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi n\right)$, $\left(2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$,
 $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} - \pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} - \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n+2k); \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$,
 $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n+2k); \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.16.** 1) $(360^\circ n; 60^\circ + 360^\circ n)$,
 $(-60^\circ + 360^\circ n; 360^\circ n)$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\left(\frac{n}{2} - k\right); \frac{\pi}{4} + \pi\left(\frac{n}{2} + k\right)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.17.** 1) $-\frac{\pi}{24} + \pi n$, $\frac{5\pi}{144} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$,
 $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{2\pi}{3} + \pi n$, $(-1)^n \arcsin \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.*
 $4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2x\right) - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right) = 0$; $2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + \sin 2x\right) - \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$;
 $4 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$; $4 \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\right) = 0$.
32.18. 1) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.*
 $4 \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x\right)^2 - 5 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)\right)$; $4 \sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) -$
 $-5 = 0$. **32.19.** 1) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $2 \sin 2x \cos x -$
 $-2 \sin x \cos x - 2 \cos x (\cos x - 1) = 0$; $2 \cos x (\sin 2x - \sin x - \cos x + 1) = 0$;
 $2 \cos x ((1 + \sin 2x) - (\sin x + \cos x)) = 0$; $2 \cos x ((\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)) = 0$;
 $2 \cos x (\sin x + \cos x) (\sin x + \cos x - 1) = 0$; 2) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.20.** 1) $\frac{\pi n}{2}$,
 $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $(\sin 4x + \cos 4x) (\sin^2 4x + \cos^2 4x - \sin 4x \cos 4x) -$
 $-(1 - \sin 4x \cos 4x) = 0$; $(\sin 4x + \cos 4x - 1) (1 - \sin 4x \cos 4x) = 0$; 2) $-\frac{\pi}{8} + \pi n$,
 $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.21.** 1) $4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.22.** 1) $6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 2) $\frac{9\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.23.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Запишемо дві

очевидні нерівності: $\cos^7 x \leq \cos^2 x$; $\sin^4 x \leq \sin^2 x$. Додаючи почленно ці нерівності, отримуємо $\cos^7 x + \sin^4 x \leq 1$. Тепер очевидно, що початкове рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \cos^7 x = \cos^2 x, \\ \sin^4 x = \sin^2 x; \end{cases}$ 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Покажіть, що при всіх допустимих значеннях x виконуються нерівності $\sqrt{\cos x} \geq \cos^2 x$ і $\sqrt{\sin x} \geq \sin^2 x$. **32.24.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.25.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Запишемо очевидні нерівності: $\sin^5 x \leq \sin^2 x$; $\cos^5 x \leq \cos^2 x$; Звідси $\sin^5 x + \cos^5 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Разом з тим зрозуміло, що $2 - \sin^4 x \geq 1$. Таким чином,

початкове рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sin^5 x = \sin^2 x, \\ \cos^5 x = \cos^2 x, \\ 2 - \sin^4 x = 1; \end{cases}$ 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

32.26. 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) розв'язків немає. *Вказівка.* Покажіть, що

$\sin x + 2 \cos x \leq \sqrt{5}$. **32.27.** $\frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Перетворіть рівняння

до вигляду $\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}} \sin(\pi x - \alpha) = 2$, де $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}}$. $\cos \alpha =$

$= \frac{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}}$. Тепер треба помітити, що ліва частина отриманого рівняння

не більша за 2. **32.28.** $\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.29.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, y = \pi n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

Вказівка. Оцінимо кожний із множників лівої частини даного рівняння.

З одного боку, $5 + \frac{3}{\sin^2 x} \geq 8$ і $2 - \sin^6 x \geq 1$. Тоді $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - \sin^6 x) \geq 8$.

З другого боку, очевидно, що $7 + \cos 2y \leq 8$. Отже, початкове рівняння

рівносильне системі $\begin{cases} 5 + \frac{3}{\sin^2 x} = 8, \\ 2 - \sin^6 x = 1, \\ 7 + \cos 2y = 8, \end{cases}$ звідси $\begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \cos 2y = 1; \end{cases}$ 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$,

$y = \frac{\pi}{4} + \pi \left(n - \frac{k}{2}\right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Скористайтеся нерівністю $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Тоді $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y \geq 2 \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y$ і $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y \geq 2(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y) \geq 4$. **32.30.** $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(n - k), y = -\pi + 2\pi(n - 2k), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

32.31. 7. Вказівка. Зауважимо, що коли число x_0 — корінь даного рівняння, то й число $(-x_0)$ — також корінь цього рівняння. Тоді дане рівняння

може мати єдиний корінь тільки за умови $x_0 = 0$. **32.32.** $\frac{1}{\sin 1}$. **32.33.** 13,5 кг.

32.34. 40 т і 100 т. **32.35.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

3) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.36.** 1) $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

2) $2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi + 2\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.37.** 1) $x = n, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$;

2) $x = 0, x = \pm 1, x = \pm 2, x = \pm \frac{5}{2}$. **32.38.** 1) $x = 3, x = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z}, n \leq 2$; 2) $x = \pm \frac{7}{2}$,

$x = \pm 3, x = \pm 1$. **32.39.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{3\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Вказівка. Дане рівняння рівносильне системі
$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1, \\ \cos \frac{x}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$
 32.40. 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.41.** 1) $\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.42.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

2) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.43.** 1) $\frac{2\pi k}{15}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 15p, p \in \mathbb{Z}$,

$\frac{\pi}{17} + \frac{2\pi n}{17}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 17m + 8, m \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 9p, p \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* По-

множите обидві частини рівності на $2 \sin \frac{x}{2}$. **32.44.** 1) $\frac{\pi k}{14}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 14p, p \in \mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 9p, p \in \mathbb{Z}$. **32.45.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, -\frac{1}{2} \arctg \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n$,

$-\arctg \frac{6 + \sqrt{3}}{11} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **32.46.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$,

$-\frac{1}{2} \arctg \frac{3\sqrt{3}}{13} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \arctg \frac{3(5 - \sqrt{3})}{11} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

33.1. 2) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

6) $\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 8) $\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 9) $\pi - \arcsin \frac{1}{6} + 2\pi n < x <$

$< 2\pi + \arcsin \frac{1}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **33.2.** 2) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n <$

- $\leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 10) $\arctg 2 + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **33.3.** 1) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x \leq \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{11\pi}{12} + \pi n < x < \frac{5\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pi + 4\pi n \leq x \leq 2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **33.4.** 1) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x \leq \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{6} + 4\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{9\pi}{4} + 3\pi n < x < -\frac{\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{17\pi}{60} + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{22\pi}{60} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. **33.5.** 1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x < \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n$ або $\pi - \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n < x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$;
- 5) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\arctg 2 + \pi n$ або $\arctg 2 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **33.6.** 1) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ або $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pi n < x < \arctg 5 + \pi n$ або $\pi - \arctg 5 + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **33.7.** 1) $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **33.8.** 1) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **33.9.** 1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\arctg 2 + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\arctg \sqrt{2} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ або $-\arctg \sqrt{2} + \pi n \leq x < \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **33.10.** 1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\pi n < x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n$ або $\frac{3\pi}{4} + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 4) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{4} + \pi n$ або $\pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **33.11.** 1) $\frac{\pi}{5} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{5} + 2\pi n$, або $\pi + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{5} + 2\pi n$, або $\frac{9\pi}{5} + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi n$ або $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$+2\pi n, \text{ або } \frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \text{ або } \frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{33.12.}$$

$$1) 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) -\frac{2\pi}{5} + 2\pi n < x < 2\pi n, \text{ або } \frac{2\pi}{5} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ або } \frac{4\pi}{5} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \text{ або } \frac{6\pi}{5} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 3) \frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ або } \frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \text{ або } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{34.8.} 1) 2; 2) 1,5; 3) 28. \mathbf{34.11.} 1) -2; 2) -1. \mathbf{34.12.} 1) \frac{1}{2}; 2) -\frac{1}{6}. \mathbf{34.13.} 1) -1;$$

$$2) \frac{1}{4}; 3) -3. \mathbf{34.14.} 1) \frac{2}{3}; 2) -2; 3) \frac{2}{3}. \text{Вказівка. } \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt[6]{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{(\sqrt[6]{x}-1)(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{x}+1)}.$$

$$\mathbf{35.7.} 8 \text{ м/с. } \mathbf{35.8.} 1) 20 \text{ м/с; } 2) 10 \text{ м/с. } \mathbf{35.9.} 1) 2,6; 2) 2. \mathbf{35.10.} 1) 7; 2) 12.$$

$$\mathbf{36.6.} 1) \frac{\sqrt{2}}{2}; 2) \frac{1}{2}. \mathbf{36.7.} 1) \frac{\sqrt{3}}{2}; 2) \frac{\sqrt{2}}{2}. \mathbf{36.8.} 1) 13,5; 2) \frac{3}{8}; 3) \frac{176}{3}.$$

$$\mathbf{36.9.} 1) 5; 2) \frac{3}{16}. \mathbf{36.10.} 1) f'(x) = -\frac{3}{x^2}; 2) f'(x) = -2x. \mathbf{36.11.} 1) f'(x) = \frac{2}{x^3};$$

$$2) f'(x) = 2x + 3. \mathbf{36.20.} 1. \text{Величина } s' \left(\frac{1}{2} \right) = 1 \text{ задає миттєву швидкість матеріальної точки в момент часу } t_0 = \frac{1}{2}. \mathbf{36.21.} 12.$$

$$\mathbf{37.14.} 1) y' = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}; 2) y' = \cos x \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x; 3) y' = \frac{\sin(2x+5)}{\cos^2 x} +$$

$$+ 2 \operatorname{tg} x \cos(2x+5); 4) y' = \frac{3(1-x) \sin 3x - \cos 3x}{(x-1)^2}; 5) y' = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}; 6) y' =$$

$$= -\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}}. \mathbf{37.15.} 1) y' = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}; 2) y' = 2 \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x;$$

$$3) y' = (x-3)^3(x+2)^4(9x-7). \mathbf{37.16.} 1) y' = -6 \cos^2 2x \sin 2x; 2) y' =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}{10 \sqrt{\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}}; 3) y' = 2 \cos \frac{x}{3} \left(\sin \frac{x}{3} - 5 \right)^5. \mathbf{37.17.} 1) \frac{1}{2}; 2) 0. \mathbf{37.19.} \frac{17}{9} \text{ м/с.}$$

$$\mathbf{37.20.} 105 \text{ м/с. } \mathbf{37.21.} 16 \text{ кг} \cdot \text{м/с. } \mathbf{37.22.} 400 \text{ Дж. } \mathbf{37.23.} 7 \text{ м. } \mathbf{37.24.} 1) 2; 0; 2) -6; 0. \mathbf{37.25.} 1) 2; -2; 2) -10; 2. \mathbf{37.26.} y = 3x - 7. \mathbf{37.27.} 1) y = x + 3.$$

$$\mathbf{38.1.} 1) y = x - 1; 2) y = \frac{2}{3}x + 3; 3) y = x; 4) y = 2x - \pi + 1; 5) y = x + 4; 6) y =$$

$$= \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}. \mathbf{38.2.} 1) y = 3x - 4; 2) y = -x + \frac{\pi}{2}; 3) y = -2,5x - 1,5; 4) y = 5x - 18.$$

$$\mathbf{38.3.} 1) y = -3x - 3; 2) y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}. \mathbf{38.4.} 1) y = -5x + 2; 2) y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

38.5. 1) $y = 6x - 3$; 2) $y = 2x - 2$, $y = 2x + 2$. **38.6.** 1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; 2) $y = -3x + 9$;
 $y = 3x$. **38.7.** (2; 7). **38.8.** (1; 1), (-1; -1). **38.9.** 1) (4; -9); 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{5}{4}\right)$;
 3) $\left(\frac{1}{12}; \frac{3}{2}\right)$; 4) (5; 4), (-1; -2). **38.10.** 1) (0; 0); 2) (0; -1), $\left(\frac{4}{3}; -\frac{23}{27}\right)$.
38.13. 1) $y = -1$, $y = 3$; 2) $y = 1$, $y = -7$. **38.14.** $y = -5$, $y = \frac{17}{3}$. **38.15.** 1) $y =$

$= 3x - 3$; 2) $y = 2x - 8$, $y = 2x + 19$. **38.16.** 1) $y = -7x - 9$; 2) $y = x + \frac{1}{4}$. **38.17.** Ні.

38.18. Так, $x_0 = 0$. **38.19.** 8. **38.20.** 2. **38.21.** (1,5; -2). *Вказівка.* Скористайтеся тим, що прями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $k_1k_2 = -1$. **38.22.** Ні. **38.23.** $b = c = 2$. **38.24.** $a = 3$,

$b = 1$. **38.25.** $y = 2\sqrt{2}x + 1$, $y = -2\sqrt{2}x + 1$. **38.26.** $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **38.27.** $\left(0; \frac{7}{2}\right)$. *Вка-*

зівка. Скористайтеся тим, що добуток кутових коефіцієнтів перпендикулярних прямих дорівнює -1 . **38.28.** (0; -3). **38.29.** 2. **38.30.** 0. **38.31.** 1) (-2; 5); 2) $[-2; 3] \cup (3; 5]$; 3) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup [2; +\infty)$.

39.1. 1) Зростає на $(-\infty; 0]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $[0; 1]$; 2) зростає на $[-1; 7]$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[7; +\infty)$; 3) зростає на $[-1; 0]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[0; 1]$; 4) зростає на \mathbb{R} . **39.2.** 1) Зростає на $(-\infty; -3]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $[-3; 1]$; 2) зростає на $[-1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$. **39.3.** 1) Зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 1]$; 2) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $(0; 1]$; 3) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0]$ і $(0; 3]$; 4) зростає на $[1; 3]$ і $(3; 5]$, спадає на $(-\infty; 1]$ і $[5; +\infty)$. **39.4.** 1) Зростає на $(-\infty; 3]$, спадає на $[3; +\infty)$; 2) спадає на $(0; 2]$, зростає на $(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty)$; 3) зростає на $(-\infty; -2]$ і $[10; +\infty)$, спадає на $[-2; 4]$ і $(4; 10]$; 4) зростає на $(-\infty; -2)$ і $(-2; 0]$, спадає на $[0; 2)$ і $(2; +\infty)$. **39.5.** $(-\infty; x_1]$ і $[x_2; x_3]$. **39.7.** $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$. **39.12.** 1) Зростає на \mathbb{R} ; 2) зростає на \mathbb{R} ; 3) зростає на проміжках виду $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

39.13. 1) Спадає на \mathbb{R} ; 2) зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right]$,

спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **39.14.** 1) Зростає

на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -4]$; 2) зростає на $[0; 3]$, спадає на $[3; 6]$.

39.15. Зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$. **39.16.** 1) $(-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4) \cup [2; 5]$. **39.17.** 1) $(0; 7) \cup (7; +\infty)$; 2) $[-3; 0] \cup (2; +\infty)$. **39.18.** 1) $(-\infty; 0]$;

2) $[12; +\infty)$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **39.19.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $(-\infty; -6]$; 3) $(-\infty; 0]$;

4) $[-4; 4]$. **39.20.** $[12; 14]$. **39.21.** $\left[-\frac{14}{3}; -3\right]$. **39.22.** 0. **39.23.** 0. **39.24.** (1; $+\infty)$.

Вказівка. Доведіть, що функція $f(x) = x^7 - 2x^4 + 3x - 2$ зростає на \mathbb{R} , причому $f(1) = 0$. **39.25.** $(-\infty; 1)$. **39.26.** (1; 1). *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(t) = t - \sin t$. Покажіть, що ця функція зростає на \mathbb{R} . Тоді з рівності $f(x) = f(y)$ випливає, що $x = y$. **39.27.** (4; 4).

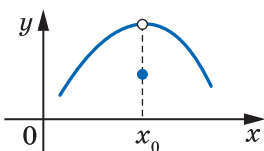
40.6. 1) $x_{\min} = -2, x_{\max} = 2$; 2) $x_{\min} = -2, x_{\min} = 2, x_{\max} = 0$; 3) $x_{\min} = 5, x_{\max} = -1$; 4) $x_{\min} = 0, x_{\max} = -1, x_{\max} = 1$. **40.7.** 1) $x_{\min} = -2, x_{\max} = 2$; 2) $x_{\min} = 1, x_{\max} = -7$; 3) $x_{\min} = \frac{3}{2}$; 4) $x_{\min} = 0, x_{\max} = -\frac{1}{4}, x_{\max} = 1$. **40.9.** Жодної. **40.10.** 1) Зростає

на $[6; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 6]$, $x_{\min} = 6$; 2) зростає на $(-\infty; \frac{8}{5}]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $[\frac{8}{5}; 2]$, $x_{\min} = 2, x_{\max} = \frac{8}{5}$; 3) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$. **40.11.** 1) Зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) зростає на $(-\infty; -4]$ і $[0; +\infty)$, спадає на $[-4; 0]$, $x_{\min} = 0, x_{\max} = -4$. **40.14.** 1) Зростає на $(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(0; 2]$, $x_{\min} = 2$; 2) зростає на $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[1; 2]$ і $(2; 3]$, $x_{\min} = 3, x_{\max} = 1$; 3) зростає на $[-\sqrt{6}; 0]$ і $[\sqrt{6}; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -\sqrt{6}]$ і $(0; \sqrt{6}]$, $x_{\min} = -\sqrt{6}, x_{\min} = \sqrt{6}$; 4) зростає на $(3; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 3)$, точок екстремуму немає; 5) зростає на $(-\infty; -4]$ і $(-4; 0]$, спадає на $[0; 4]$ і $(4; +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 6) зростає на $[0; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$. **40.15.** 1) Зростає на $(-\infty; -6]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $[-6; -2]$ і $(-2; 2]$, $x_{\max} = -6, x_{\min} = 2$; 2) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0]$ і $(0; 3]$, $x_{\max} = -3, x_{\min} = 3$; 3) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 4) зростає на $(-\infty; -1)$, спадає на $(-1; +\infty)$, точок екстремуму немає; 5) зростає на $[0; 4]$ і $(4; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -4]$ і $(-4; 0]$, $x_{\min} = 0$; 6) зростає на $[\frac{1}{16}; +\infty)$, спадає на $[0; \frac{1}{16}]$, $x_{\min} = \frac{1}{16}$. **40.18.** Ні. **40.19.** 1) Так; 2) ні; 3) ні.

40.20. 1) Спадає на проміжках виду $[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k]$, зростає на проміжках виду $[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, x_{\min} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 2) зростає на проміжках виду $[-\frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k]$, спадає на проміжках виду $[-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{6} + \pi k, x_{\min} = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **40.21.** 1) Зростає на проміжках виду $[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k]$, спадає на проміжках виду $[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k]$, $x_{\max} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 2) зростає на проміжках виду $[-\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k]$, спадає на проміжках виду $[\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k]$,

$$x_{\max} = \frac{\pi}{8} + \pi k, \quad x_{\min} = -\frac{\pi}{8} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad 40.22. \quad -3; 3. \quad 40.23. \quad -1; 1. \quad 40.26. \quad \text{Може.}$$

Вказівка. Див. рисунок. 40.27. 1) $x_{\min} = \frac{\pi}{8} + \pi k, \quad x_{\max} = -\frac{3\pi}{8} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$ 2) $x_{\min} =$



До задачі 40.26

$$= \pi k, \quad x_{\max} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad 40.28. \quad 1) \quad x_{\min} = \frac{2\pi}{3} + \pi k,$$

$$x_{\max} = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 2) \quad x_{\min} = \pi + 2\pi k, \quad x_{\max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,$$

$$k \in \mathbb{Z}. \quad 40.29. \quad (-1; 1) \cup (1; +\infty). \quad 40.30. \quad (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

$$40.31. \quad 1. \quad 40.32. \quad 1. \quad 40.33. \quad 1. \quad 40.34. \quad 2.$$

$$41.1. \quad 1) \quad 4; 0; 2) \quad 13; 4; 3) \quad 60; -75; 4) \quad -4; -8.$$

$$41.2. \quad 1) \quad 0; -\frac{16}{3}; 2) \quad 1; -2; 3) \quad 48; -6; 4) \quad 0; -28. \quad 41.3.$$

$$1) \quad 10; 6; 2) \quad 5; \sqrt{13}; 3) \quad 100; 0; 4) \quad -2; -2,5. \quad 41.4. \quad 1) \quad 5; 3; 2) \quad 2; -2; 3) \quad 81; 0;$$

$$4) \quad 10; 6. \quad 41.5. \quad 1) \quad \sqrt{2}; -1; 2) \quad \frac{2+\pi\sqrt{3}}{2}; \frac{2-\pi\sqrt{3}}{2}. \quad 41.6. \quad 1) \quad 2; -1; 2) \quad 2; -2.$$

$$41.7. \quad 8=6+2. \quad 41.8. \quad 12=8+4. \quad 41.9. \quad 1) \quad \frac{3}{2}; 1; 2) \quad -3; -4. \quad 41.10. \quad 1) \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0; 2) \quad 4;$$

$$-2. \quad 41.11. \quad 180=40+80+60. \quad 41.12. \quad 18=8+3+7. \quad 41.13. \quad 30 \text{ см}^2. \quad 41.14. \quad 8 \text{ см}$$

$$\text{і } 2\sqrt{3} \text{ см. } 41.15. \quad 20\sqrt{2} \text{ см і } 10\sqrt{2} \text{ см. } 41.16. \quad \frac{24\sqrt{5}}{5} \text{ см, } \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ см. } 41.17. \quad 32.$$

$$41.18. \quad 12\sqrt{6}. \quad 41.19. \quad 16 \text{ см. } 41.20. \quad 2a. \quad 41.21. \quad \frac{\pi}{3}. \quad 41.22. \quad \frac{\pi}{3}. \quad 41.23. \quad 1,5R.$$

$$41.24. \quad \left(\frac{16}{9}; \frac{4}{3}\right). \quad 41.25. \quad \left(\frac{7}{3}; -\frac{26}{9}\right). \quad 41.26. \quad \text{Шукана точка знаходиться на від-$$

$$\text{стані } 25 \text{ км від пункту } C. \quad 41.27. \quad 60^\circ. \quad 41.29. \quad 4. \quad 41.30. \quad -3.$$

$$42.1. \quad 5) \quad 80(2x-1)^3; 6) \quad -2 \cos 2x; 8) \quad 2 \cos x - x \sin x. \quad 42.2. \quad 5) \quad 54(1-3x);$$

$$6) \quad -4 \cos 2x; 7) \quad 2 \cos 2x; 8) \quad -2 \sin x - x \cos x. \quad 42.3. \quad 1) \quad -26,5; 2) \quad 53.$$

$$42.4. \quad 14 \text{ м/с}^2. \quad 42.5. \quad 10 \text{ м/с}^2, 5 \text{ м/с}^2. \quad 42.6. \quad 90 \text{ Н. } 42.7. \quad 1) \quad \text{Опукла вгору}$$

$$\text{на } (-\infty; 0], \text{ опукла вниз на } [0; +\infty), x=0 \text{ — точка перегину; } 2) \quad \text{опукла}$$

$$\text{вгору на } [1; 3], \text{ опукла вниз на } (-\infty; 1] \text{ і } [3; +\infty), x=1 \text{ і } x=3 \text{ — точки пере-}$$

$$\text{гину. } 42.8. \quad 1) \quad \text{Опукла вгору на } \left(-\infty; \frac{2}{3}\right], \text{ опукла вниз на } \left[\frac{2}{3}; +\infty\right), x=\frac{2}{3} \text{ —}$$

$$\text{точка перегину; } 2) \quad \text{опукла вгору на } [1; 2], \text{ опукла вниз на } (-\infty; 1] \text{ і } [2; +\infty),$$

$$x=1 \text{ і } x=2 \text{ — точки перегину. } 42.9. \quad 0. \quad 42.10. \quad 0. \quad 42.13. \quad 1) \quad \text{Опукла вгору на}$$

$$\text{кожному з проміжків } (-\infty; -\sqrt{3}] \text{ і } [0; \sqrt{3}], \text{ опукла вниз на кожному з про-}$$

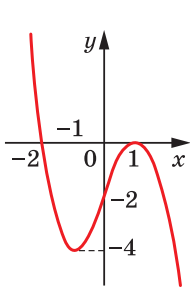
$$\text{міжків } [-\sqrt{3}; 0] \text{ і } [\sqrt{3}; +\infty), x=-\sqrt{3}, x=0, x=\sqrt{3} \text{ — точки перегину;}$$

$$2) \quad \text{опукла вгору на } (-\infty; -2], \text{ опукла вниз на кожному з проміжків } [-2; 1]$$

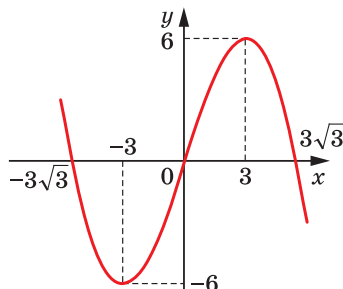
$$\text{і } (1; +\infty), x=-2 \text{ — точка перегину. } 42.14. \quad 1) \quad \text{Опукла вгору на } \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right],$$

опукла вниз на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ і $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ і $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — точки перегину; 2) опукла вгору на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$ і $(-1; 2]$, опукла вниз на $[2; +\infty)$, $x = 2$ — точка перегину. **42.15.** Опукла вгору на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, точками перегину є точки виду $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **42.16.** Опукла вгору на кожному з проміжків виду $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$, точками перегину є точки виду $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

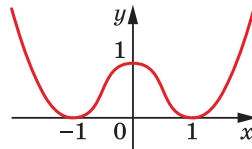
43.1. Див. рисунок.



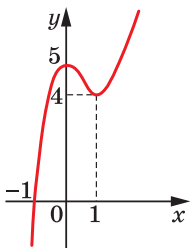
1)



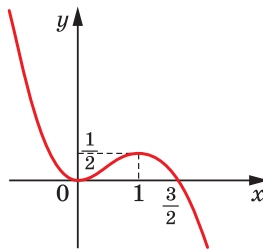
3)



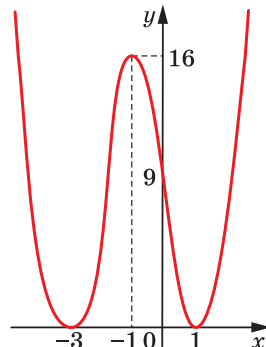
5)



2)



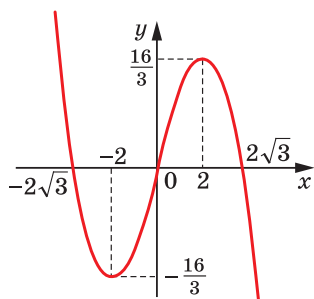
4)



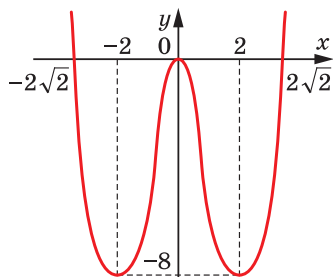
6)

До задачі 43.1

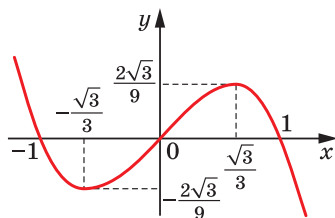
43.2. Див. рисунок.



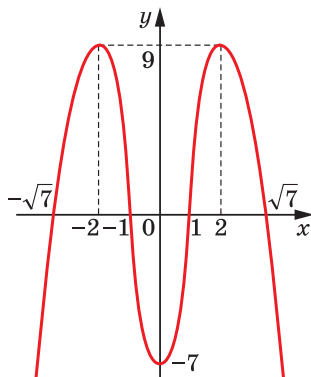
1)



3)



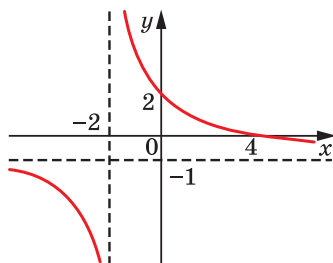
2)



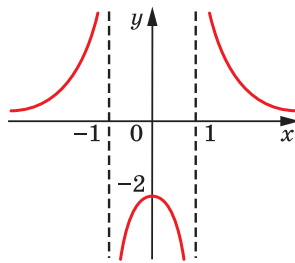
4)

До задачі 43.2

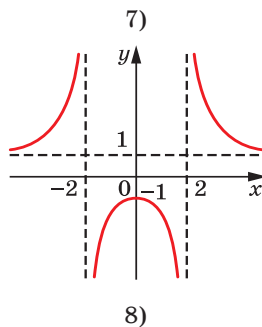
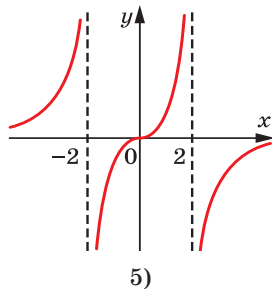
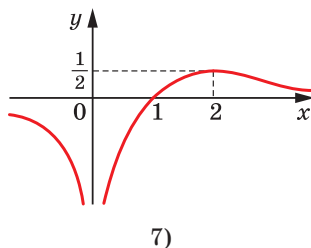
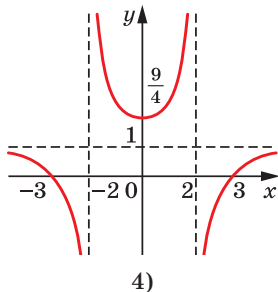
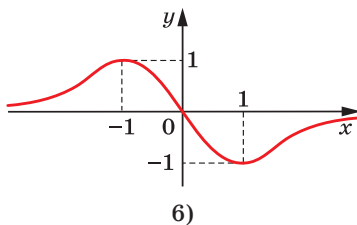
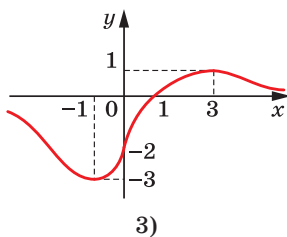
43.3. Див. рисунок.



1)

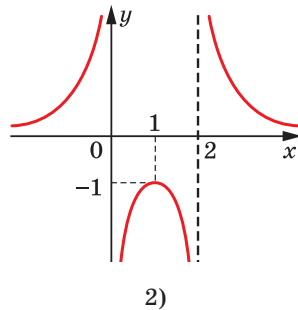
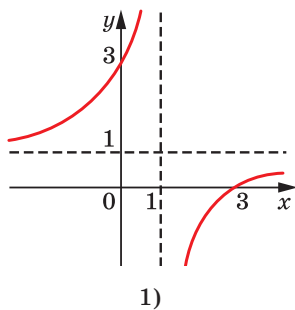


2)

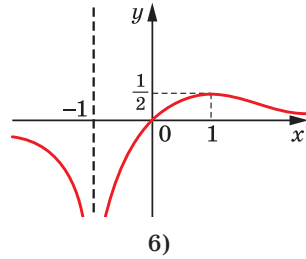
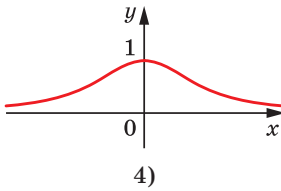
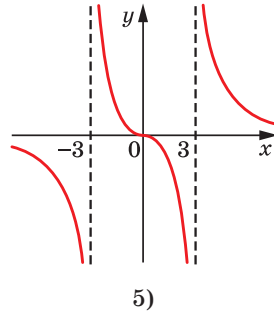
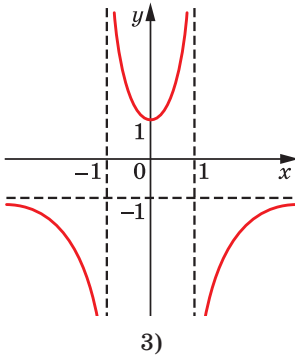


До задачі 43.3

43.4. Див. рисунок. 43.5. Якщо $a < -1$ або $a > 0$, то 1 корінь; якщо $a = -1$ або $a = 0$, то 2 корені; якщо $-1 < a < 0$, то 3 корені. 43.6. Якщо $a > 4$, то коренів немає; якщо $a = 4$ або $a < 0$, то 2 корені; якщо $a = 0$, то 3 корені; якщо $0 < a < 4$, то 4 корені.

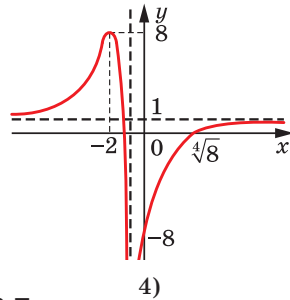
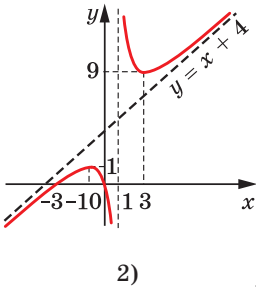
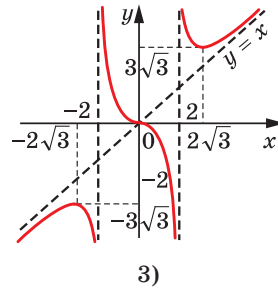
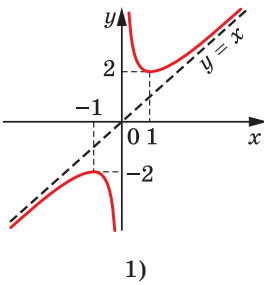


До задачі 43.4 (1), (2)



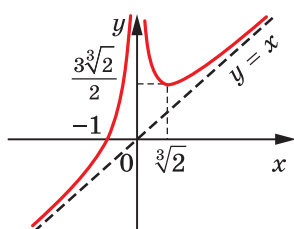
До задачі 43.4 (3)–(6)

43.7. Див. рисунок.

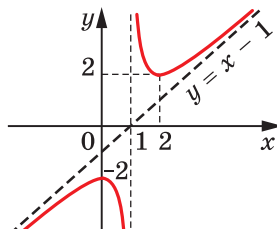


До задачі 43.7

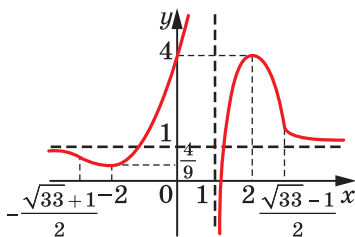
43.8. Див. рисунок. 43.9. $\frac{\pi}{2}$. 43.10. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.



1)



2)



3)

До задачі 43.8

44.2. $A = C$. 44.6. 1) $\{1\} \cup [2; +\infty)$; 2) $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$; 4) $\{-5\} \cup [-2; +\infty)$.

44.7. 1) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{23}{12}\right]$; 4) $(-\infty; +\infty)$. 44.9. Якщо

$a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 1$, то 2 корені; якщо $a = 1$, то 3 корені; якщо $0 < a < 1$, то 4 корені. 44.12. 2) $(-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [3; +\infty)$;

4) $(-\infty; -5) \cup (-4; 0) \cup (4; 6)$; 5) $(-\infty; -1) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup$

$\left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (3; +\infty)$; 7) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; 8) $(-\infty; -4] \cup \{-3\} \cup [5; +\infty)$. 44.13.

1) $(-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-5; 3) \cup (3; 4)$. 44.14. 2) $(-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

44.15. 1) $[3; 7] \cup \{-2\}$; 2) $(-2; 3)$. 44.16. $(-3; 0) \cup (3; +\infty)$. 44.17. 1) Якщо $a = 5$, то $x < 5$ або $x > 5$; якщо $a < 5$, то $x < a$ або $x \geq 5$; якщо $a > 5$, то $x \leq 5$ або $x > a$; 2) якщо $a = -1$, то $x > -1$; якщо $a < -1$, то $a \leq x < -1$ або $x > -1$; якщо $a > -1$, то $x \geq a$. 44.25. 1) Один корінь при будь-якому значенні a ; 2) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a \geq 0$, то 1 корінь. 44.27. $-\sqrt[3]{3}$.

44.29. 1) $\frac{\sqrt[4]{a}-1}{a}$; 2) $\sqrt[6]{a}$. 44.30. 1) 10; 2) $\frac{25}{21}$. 44.31. 1) $\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{13}{12}}}$;

- 2) $a^2 + ab + b^2$; 3) 3; 4) 0. **44.32.** 1) 4; 2) -1; 5) 5. **44.33.** 1) 8; 2) коренів немає. **44.34.** 1) 16; 2) 1; 29. **44.35.** 1) 1; 4; 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$. **44.36.** 1) (64; 1); 2) (6; 3), (3; 1,5). **44.37.** 1) $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; 2) 2. **44.38.** 1) [3; 5]; 2) $(-\infty; -1] \cup [0; 1)$. **44.39.** 1) [0; 3]; 2) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $(-\infty; -1]$. **44.40.** 3) -2; 2; 2) [3; 12]. **44.41.** $\left[-1; -\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{4}; 1\right]$. **44.42.** 3) $-2 \leq a \leq -\sqrt{2}$ або $\sqrt{2} \leq a \leq 2$. **44.43.** Найбільшого і найменшого значень не існує. **44.44.** 2) Не є ні парною, ні непарною; 3) непарна. **44.45.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **44.48.** 176π . **44.51.** 1) Ні. *Вказівка.* $\operatorname{tg} 80^\circ > \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$; 2) ні; 3) так. **44.52.** 1) $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$; 2) 1; 3) 1; 4) 4. **44.53.** $\frac{12}{7}$. **44.54.** $-2 \operatorname{tg} \alpha$. **44.55.** $\frac{6}{7}$. **44.58.** $1 - \cos \frac{\alpha}{2}$; 2) 1. **44.60.** 1) $\frac{56}{65}$; 2) $\frac{4\sqrt{2} + \sqrt{5}}{9}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **44.61.** 1) $\frac{2\pi}{9}$; 2) $\frac{3\pi}{8}$. **44.62.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **44.63.** 1) $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$, $\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arccotg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **44.64.** 1) $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$, $\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **44.65.** $-\pi$. **44.66.** 4 корені. **44.67.** 1) $[-1; 2]$; 2) 3. **44.68.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, πn , $n \in \mathbb{Z}$. **44.69.** 1) $a < -1$, або $a = \frac{7}{10}$, або $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{7}{10} < a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{1}{2} < a < \frac{7}{10}$, або $a = -1$. **44.70.** 1) 3; 2) $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{2}; \frac{1+\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left\{-\frac{13}{12}\right\}$; 3) $[1; 3] \cup \left\{-\frac{13}{12}\right\}$; 4) $\left[\frac{1-\sqrt{10}}{2}; -1\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{10}}{2}; 3\right)$; 5) -1; 6) $\left(-\frac{13}{12}; -1\right)$. **44.71.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **44.72.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $45^\circ + 180^\circ n$, $-75^\circ + 180^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$. **44.73.** $x = \frac{-5 + \sqrt{25 - 8k}}{2}$, $y = \frac{-5 - \sqrt{25 - 8k}}{2}$, або $x = \frac{-5 - \sqrt{25 - 8k}}{2}$, $y = \frac{-5 + \sqrt{25 - 8k}}{2}$, або $x = \frac{5 + \sqrt{21 - 8n}}{2}$, $y = \frac{5 - \sqrt{21 - 8n}}{2}$, або $x = \frac{5 - \sqrt{21 - 8n}}{2}$, $y = \frac{5 + \sqrt{21 - 8n}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \leq 3$, $n \leq 2$. **44.74.** $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $y = -3$ або $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $y = 3$, $n \in \mathbb{Z}$. **44.75.** 1) $\left((-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \pi n\right)$, $\left(\pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{1}{6} + 2n; \frac{1}{6} - 2n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} - \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

- 44.76.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$; 2) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$; 3) $\frac{1}{4} + \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 1$.
- 44.77.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 44.78.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 44.79.** $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 44.80.** $\frac{\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 9p, p \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Скористайтеся формулою пониження степеня.
- 44.82.** 1) $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 3) $\frac{\pi n}{5} < x < \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$.
- 44.83.** 3) $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{4} \arccos \frac{1}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
- 44.84.** 1) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x \leq -\arccos \frac{1}{4} + 2\pi n, \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n \leq x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\arctg 2 + \pi n < x < \arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 3) $\arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n \leq x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x \leq \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 4) $\arctg 1,5 + \pi n < x < \pi - \arctg 4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 6) $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
- 44.85.** 1) $x \neq \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{3}{8} + 2\pi n < x < \frac{5}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 44.86.** 1) $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{5\pi}{6} + \pi n < x < \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 3) $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{5\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 44.87.** $2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 44.90.** 1) $y' = \frac{9}{x^4} - \frac{9}{x^{10}}$;
 2) $y' = (x+1)^2(x-2)^3(7x-2)$.
- 44.91.** 1) $y = -2x + 2$; 2) $y = -2x - \pi - 1$.
- 44.92.** $y = -x - 4$. **44.93.** Да, $x_0 = 1$. **44.94.** $y = 2x - 5, y = 6x - 13$. **44.95.** (1; 4). **44.96.** 1) Зростає на $[-2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -2]$; 2) зростає на $[2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 2]$; 3) зростає на $[0; 1]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $[1; 2]$; 4) спадає на $(-\infty; -3), (-3; 3]$ і $(3; +\infty)$.
- 44.97.** Зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 44.98.** $(-\infty; -3]$. **44.99.** 1) Зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; +\infty)$, $x_{\max} = 0$;
 2) зростає на $(0; 2]$, спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty)$, $x_{\max} = 2$;
 3) зростає на $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, спадає на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{1}{3}$.
- 44.100.** $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, x_{\max} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 44.101.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}; -2$.

Предметний покажчик

- Аргумент функції 13
- Аркосинус 198
- Аркотангенс 213
- Арксинус 205
- Арктангенс 211
 - Асимптота вертикальна 346
 - горизонтальна 346
 - похила 348
- База індукції 50
- Відрізок 262
- Вільний член цілого раціонального рівняння 45
- Вісь котангенсів 127
 - тангенсів 127
- Геометричний зміст похідної 282
- Границя функції в точці 263
- Диференціювання 285
- Діаграма Ейлера 7
- Ділене 42
- Ділення многочленів націло 42
- Дільник 42
- Доповнення множини 10
- Дотична до графіка функції 278
- Закон руху точки 276
- Знак кореня n -го степеня 70
- Індуктивний метод 48
 - перехід 50
- Індуктивні висновки 48
- Індукція 48
- Інтервал 262
- Коефіцієнти цілого раціонального рівняння 45
- Корінь n -го степеня 69
 - арифметичний n -го степеня 71
 - кубічний 70
- многочлена 43
- Косинус кута повороту 124
- Косинусоїда 145
- Котангенс кута повороту 125
- Кут в 1 радіан 117
 - I чверті 132
 - II чверті 132
 - III чверті 132
 - IV чверті 132
- Метод заміни змінної 103
 - інтервалів 37
 - математичної індукції 49
 - розкладання на множники 239
- Механічний зміст похідної 282
- Миттєва швидкість 277
- Множина 6
 - порожня 7
- Найбільше значення функції на множині 14
- Найменше значення функції на множині 14
- Наслідок рівняння 94
 - нерівності 107
- Нерівності найпростіші тригонометричні 248
 - рівносильні 107
- Об'єднання множин 8
- Область визначення рівняння 93
 - — функції 13
 - — —, симетрична відносно початку координат 16
 - значень функції 13
- Одиничне коло 118
- Ознака зростання функції 311
 - опуклості функції вгору 337
 - — — вниз 337
 - спадання функції 311
 - сталості функції 309
 - точки максимуму функції 318
 - точки мінімуму функції 318
- Окіл точки 317
- Основна тригонометрична тотожність 156
- Остача 43
- Переріз множин 8
- Період функції 136
 - — головний 137
 - спільний 139
- Підкореневий вираз 70
- Підмножина 7
 - власна 7
- Похідна 281
 - друга 336
- Приріст аргументу функції в точці 274
 - функції в точці 275
- Радикал 70
- Радіан 117
- Радіанна міра 118

- Рівняння дотичної 301
 - ірраціональне 95
 - найпростіше тригонометричне 31
 - наслідок п.13
 - однорідне тригонометричне n -го степеня 232
 - рівносильні 93
- ціле раціональне 45
- Різниця множин 9
- Розтягнення від осі ординат 21
- Розрив 36
- Симетрія** відносно осі ординат 21
- Синус кута повороту 124
- Синусоїда 144
- Степінь з раціональним показником 87
- Стискання до осі ординат 21
- Сторонній корінь рівняння 94
- Тангенс** кута повороту 125
- Теорема Безу 44
 - Лагранжа 309
 - Роля 308
 - Ферма 307
- Точка екстремуму 319
 - критична 320
 - локального максимуму 329
 - — мінімуму 329
 - максимуму 318
 - мінімуму 318
 - перегіну п.42
- Формула косинуса** подвійного аргументу 173
 - — половинного аргументу 177
 - — потрійного аргументу 175
 - — різниці 162
 - — суми 162
 - різниці косинусів 185
 - — котангенсів 186
 - — синусів 185
 - — тангенсів 186
 - синуса подвійного аргументу 173
 - — половинного аргументу 177
 - — потрійного аргументу 175
 - — різниці 163
 - — суми 163
 - суми косинусів 185
 - — котангенсів 186
 - — синусів 185
 - — тангенсів 185
 - — тангенса подвійного аргументу 173
 - — половинного аргументу 177
 - — різниці 163
 - — суми 163
- Формули додавання** 161
 - зведення 169
 - перетворення добутку тригонометричних функцій у суму 186
 - подвійного аргументу 173
 - половинного аргументу 176
 - пониження степеня 173
 - потрійного аргументу 175
- Функції** взаємно обернені 31
- Функція** 12
 - двічі диференційовна 337
 - , — — в точці 336
 - , — — на множині 336
 - диференційовна 285
 - , — в точці 283
 - , — на множині 284
 - непарна 16
 - неперервна 36, 265
 - — в точці 265
 - — на множині 265
 - обернена 31
 - обмежена 154
 - оборотна 30
 - — на множині 32
 - опукла вгору на проміжку 337
 - — вниз на проміжку 337
 - парна 16
 - періодична 135
 - раціональна 266
 - складена 296
 - степенева з натуральним показником 60
 - — — раціональним показником 87
 - — із цілим показником 64
 - тригонометрична 126
- Характеристична властивість** 6
- Частка** 42
 - неповна 43
- Числа** сумірні 139
 - несумірні 139

ЗМІСТ

<i>Від авторів</i>	3
<i>Умовні позначення</i>	4
§ 1. Повторення та розширення відомостей про множини та функції	5
1. Множини. Операції над множинами	6
2. Функція та її властивості.....	12
3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень	20
4. Обернена функція	29
5. Метод інтервалів	35
6. Ділення многочленів. Теорема Безу	42
7. Метод математичної індукції.....	48
• Львівська математична школа	54
<i>Головне в параграфі 1</i>	56
§ 2. Степенева функція	59
8. Степенева функція з натуральним показником.....	60
9. Степенева функція із цілим показником.....	64
10. Означення кореня n -го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$	69
11. Властивості кореня n -го степеня.....	78
12. Степінь з раціональним показником та його властивості.....	86
13. Ірраціональні рівняння	93
14. Різні прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь та їхніх систем.....	103
15. Ірраціональні нерівності.....	107
<i>Головне в параграфі 2</i>	112
§ 3. Тригонометричні функції	116
16. Радіанна міра кута.....	117
17. Тригонометричні функції числового аргументу	124
• Ставай Остроградським!	131
18. Знаки значень тригонометричних функцій	132
19. Періодичні функції	135
20. Властивості та графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$	142
21. Властивості та графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$	150
22. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу.....	156
23. Формули додавання.....	161
24. Формули зведення.....	168

25. Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів.....	173
26. Формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій.....	184
<i>Головне в параграфі 3</i>	191
§ 4. Тригонометричні рівняння і нерівності	196
27. Рівняння $\cos x = b$	197
28. Рівняння $\sin x = b$	203
29. Рівняння $\operatorname{tg} x = b$ і $\operatorname{ctg} x = b$	211
30. Функції $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$	216
31. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних	231
32. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники. Застосування обмеженості тригонометричних функцій	239
• Про рівносильні переходи під час розв'язування тригонометричних рівнянь	244
33. Тригонометричні нерівності	248
<i>Головне в параграфі 4</i>	257
§ 5. Похідна та її застосування	259
34. Означення границі функції в точці та функції, неперервної в точці	260
• Деякі властивості неперервних функцій	270
35. Задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції.....	274
36. Поняття похідної	281
37. Правила обчислення похідних	292
38. Рівняння дотичної.....	301
39. Ознаки зростання і спадання функції.....	306
40. Точки екстремуму функції.....	317
41. Найбільше і найменше значення функції на відрізку	328
42. Друга похідна. Поняття опуклості функції	336
43. Побудова графіків функцій	343
<i>Головне в параграфі 5</i>	351
44. Вправи для повторення курсу алгебри і початків аналізу 10 класу	354
<i>Відповіді та вказівки до вправ</i>	364
<i>Предметний покажчик</i>	396